TESTS — CORRECTION

SIMON COSTE ET PIERRE MONTAGNON

Exercice 1. Un commentaire préliminaire s'impose. On remarque que H_0 et H_1 sont bien disjointes mais ne forment pas une partition des cas possibles : en effet, le cas $m > 80$ n'est pas pris en compte. Ce choix résulte d'une pure contrainte mathématique et revient à formuler H_0 comme une hypothèse simple (c'est-à-dire comme une égalité) plutôt que composite (comme c'est le cas de H_1) pour pouvoir décrire précisément la loi des observations sous H_0. On pourra remarquer que la formulation retenue correspond au cas limite dans lequel le bruit émis par les avions se situe exactement au seuil légal ; parmi les hypothèses simples de la forme $m = m_0$ avec $m_0 \in [80, +\infty[$, c'est celle qui conduit le plus souvent au rejet du test pour des observations données. Il s'agit ici encore d'un facteur jouant en faveur des riverains !

(1) Le risque contrôlé de façon préférentielle [1] est le risque de première espèce

$$\mathbf{P}_{H_0}\,(\text{On rejette } H_0)$$

qui correspond au fait d'innocenter à tort l'aéroport : les concepteurs du test jugent donc moins grave d'indemniser à tort les riverains que de commettre l'erreur inverse. Le risque de seconde espèce est justement la probabilité d'indemnisation à tort

$$\mathbf{P}_{H_1}\,(\text{On ne rejette pas } H_0)$$

(2) (a) Sous H_0, $\overline{X_40}$ est la moyenne empirique de 40 variables indépendantes de même loi $\mathcal{N}(80, 49)$, donc suit la loi $\mathcal{N}\left(80, \frac{49}{40}\right)$ par le théorème de stabilité des lois normales.

(b) La région critique du test, aussi appelée *zone de rejet*, est l'ensemble des observations qui conduisent au rejet de l'hypothèse H_0. On souhaite bien sûr rejeter H_0 si la moyenne empirique des observations réalisées est trop faible par rapport à 80, c'est-à-dire que la zone de rejet est de la forme

$$Z = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^{40} \;\middle|\; \frac{1}{40}\sum_{i=1}^{40} x_i \leqslant t \right\}$$

pour un certain $t \in [0, 80]$. Sous H_0, la probabilité pour que $(X_1, \ldots, X_{40}) \in Z$ doit être égale à 1%, donc on doit avoir

$$\mathbf{P}_{H_0}\left(\overline{X_{40}} \leqslant t\right) = 0,01$$

Date: 2020-2021.

1. On ne parle pas ici des seuils fixés pour le niveau et la puissance du test, mais simplement du fait que le niveau du test est la première des deux quantités que l'on cherche à contrôler... et parfois la seule, comme dans le cas présent !

FRACTILES DE LA LOI NORMALE RÉDUITE

P	0,000	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009	0,010	
0,00	∞	3,0902	2,8782	2,7478	2,6521	2,5758	2,5121	2,4573	2,4089	2,3656	2,3263	0,99
0,01	2,3263	2,2904	2,2571	2,2262	2,1973	2,1701	2,1444	2,1201	2,0969	2,0749	2,0537	0,98
0,02	2,0537	2,0335	2,0141	1,9954	1,9774	1,9600	1,9431	1,9268	1,9110	1,8957	1,8808	0,97
0,03	1,8808	1,8663	1,8522	1,8384	1,8250	1,8119	1,7991	1,7866	1,7744	1,7624	1,7507	0,96
0,04	1,7507	1,7392	1,7279	1,7169	1,7060	1,6954	1,6849	1,6747	1,6646	1,6546	1,6449	0,95
0,05	1,6449	1,6352	1,6258	1,6164	1,6072	1,5982	1,5893	1,5805	1,5718	1,5632	1,5548	0,94
0,06	1,5548	1,5464	1,5382	1,5301	1,5220	1,5141	1,5063	1,4985	1,4909	1,4833	1,4758	0,93
0,07	1,4758	1,4684	1,4611	1,4538	1,4466	1,4395	1,4325	1,4255	1,4187	1,4118	1,4051	0,92
0,08	1,4051	1,3984	1,3917	1,3852	1,3787	1,3722	1,3658	1,3595	1,3532	1,3469	1,3408	0,91
0,09	1,3408	1,3346	1,3285	1,3225	1,3165	1,3106	1,3047	1,2988	1,2930	1,2873	1,2816	0,90
0,10	1,2816	1,2759	1,2702	1,2646	1,2591	1,2536	1,2481	1,2426	1,2372	1,2319	1,2265	0,89
0,11	1,2265	1,2212	1,2160	1,2107	1,2055	1,2004	1,1952	1,1901	1,1850	1,1800	1,1750	0,88
0,12	1,1750	1,1700	1,1650	1,1601	1,1552	1,1503	1,1455	1,1407	1,1359	1,1311	1,1264	0,87
0,13	1,1264	1,1217	1,1170	1,1123	1,1077	1,1031	1,0985	1,0939	1,0893	1,0848	1,0803	0,86
0,14	1,0803	1,0758	1,0714	1,0669	1,0625	1,0581	1,0537	1,0494	1,0450	1,0407	1,0364	0,85
0,15	1,0364	1,0322	1,0279	1,0237	1,0194	1,0152	1,0110	1,0069	1,0027	0,9986	0,9945	0,84
0,16	0,9945	0,9904	0,9863	0,9822	0,9782	0,9741	0,9701	0,9661	0,9621	0,9581	0,9542	0,83
0,17	0,9542	0,9502	0,9463	0,9424	0,9385	0,9346	0,9307	0,9269	0,9230	0,9192	0,9154	0,82
0,18	0,9154	0,9116	0,9078	0,9040	0,9002	0,8965	0,8927	0,8890	0,8853	0,8816	0,8779	0,81
0,19	0,8779	0,8742	0,8705	0,8669	0,8633	0,8596	0,8560	0,8524	0,8488	0,8452	0,8416	0,80
0,20	0,8416	0,8381	0,8345	0,8310	0,8274	0,8239	0,8204	0,8169	0,8134	0,8099	0,8064	0,79
0,21	0,8064	0,8030	0,7995	0,7961	0,7926	0,7892	0,7858	0,7824	0,7790	0,7756	0,7722	0,78
0,22	0,7722	0,7688	0,7655	0,7621	0,7588	0,7554	0,7521	0,7488	0,7454	0,7421	0,7388	0,77
0,23	0,7388	0,7356	0,7323	0,7290	0,7257	0,7225	0,7192	0,7160	0,7128	0,7095	0,7063	0,76
0,24	0,7063	0,7031	0,6999	0,6967	0,6935	0,6903	0,6871	0,6840	0,6808	0,6776	0,6745	0,75
0,25	0,6745	0,6713	0,6682	0,6651	0,6620	0,6588	0,6557	0,6526	0,6495	0,6464	0,6433	0,74
0,26	0,6433	0,6403	0,6372	0,6341	0,6311	0,6280	0,6250	0,6219	0,6189	0,6158	0,6128	0,73
0,27	0,6128	0,6098	0,6068	0,6038	0,6008	0,5978	0,5948	0,5918	0,5888	0,5858	0,5828	0,72
0,28	0,5828	0,5799	0,5769	0,5740	0,5710	0,5681	0,5651	0,5622	0,5592	0,5563	0,5534	0,71
0,29	0,5534	0,5505	0,5476	0,5446	0,5417	0,5388	0,5359	0,5330	0,5302	0,5273	0,5244	0,70
0,30	0,5244	0,5215	0,5187	0,5158	0,5129	0,5101	0,5072	0,5044	0,5015	0,4987	0,4959	0,69
0,31	0,4959	0,4930	0,4902	0,4874	0,4845	0,4817	0,4789	0,4761	0,4733	0,4705	0,4677	0,68
0,32	0,4677	0,4649	0,4621	0,4593	0,4565	0,4538	0,4510	0,4482	0,4454	0,4427	0,4399	0,67
0,33	0,4399	0,4372	0,4344	0,4316	0,4289	0,4261	0,4234	0,4207	0,4179	0,4152	0,4125	0,66
0,34	0,4125	0,4097	0,4070	0,4043	0,4016	0,3989	0,3961	0,3934	0,3907	0,3880	0,3853	0,65
0,35	0,3853	0,3826	0,3799	0,3772	0,3745	0,3719	0,3692	0,3665	0,3638	0,3611	0,3585	0,64
0,36	0,3585	0,3558	0,3531	0,3505	0,3478	0,3451	0,3425	0,3398	0,3372	0,3345	0,3319	0,63
0,37	0,3319	0,3292	0,3266	0,3239	0,3213	0,3186	0,3160	0,3134	0,3107	0,3081	0,3055	0,62
0,38	0,3055	0,3029	0,3002	0,2976	0,2950	0,2924	0,2898	0,2871	0,2845	0,2819	0,2793	0,61
0,39	0,2793	0,2767	0,2741	0,2715	0,2689	0,2663	0,2637	0,2611	0,2585	0,2559	0,2533	0,60
0,40	0,2533	0,2508	0,2482	0,2456	0,2430	0,2404	0,2378	0,2353	0,2327	0,2301	0,2275	0,59
0,41	0,2275	0,2250	0,2224	0,2198	0,2173	0,2147	0,2121	0,2096	0,2070	0,2045	0,2019	0,58
0,42	0,2019	0,1993	0,1968	0,1942	0,1917	0,1891	0,1866	0,1840	0,1815	0,1789	0,1764	0,57
0,43	0,1764	0,1738	0,1713	0,1687	0,1662	0,1637	0,1611	0,1586	0,1560	0,1535	0,1510	0,56
0,44	0,1510	0,1484	0,1459	0,1434	0,1408	0,1383	0,1358	0,1332	0,1307	0,1282	0,1257	0,55
0,45	0,1257	0,1231	0,1206	0,1181	0,1156	0,1130	0,1105	0,1080	0,1055	0,1030	0,1004	0,54
0,46	0,1004	0,0979	0,0954	0,0929	0,0904	0,0878	0,0853	0,0828	0,0803	0,0778	0,0753	0,53
0,47	0,0753	0,0728	0,0702	0,0677	0,0652	0,0627	0,0602	0,0577	0,0552	0,0527	0,0502	0,52
0,48	0,0502	0,0476	0,0451	0,0426	0,0401	0,0376	0,0351	0,0326	0,0301	0,0276	0,0251	0,51
0,49	0,0251	0,0226	0,0201	0,0175	0,0150	0,0125	0,0100	0,0075	0,0050	0,0025	0,0000	0,50
	0,010	0,009	0,008	0,007	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,001	0,000	P

Grandes valeurs de u

P	0,9999	0,99999	0,999999	0,9999999	0,99999999	0,999999999
u	3,7190	4,2649	4,7534	5,1993	5,6120	5,9978

FIGURE 1. Table de quantiles de la loi normale centrée réduite

soit

$$\mathbf{P}_{\mathrm{H}_0}\left(\frac{\overline{\mathrm{X}_{40}}-80}{\sqrt{\frac{49}{40}}} \leqslant \frac{t-80}{\sqrt{\frac{49}{40}}}\right)=0,01$$

soit encore

$$\Phi\left(\frac{t-80}{\sqrt{\frac{49}{40}}}\right)=0,01$$

puisque $\frac{\overline{\mathrm{X}_{40}}-80}{\sqrt{\frac{49}{40}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ d'après la question précédente, d'où

$$t=80+\sqrt{\frac{49}{40}}\Phi^{-1}(0,01) \approx 80-1,11 \times 2,33 \approx 77,41$$

grâce à la table 1, et enfin

$$\mathrm{Z} = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^{40} \;\middle|\; \frac{1}{40}\sum_{i=1}^{40} x_i \leqslant 80 + \sqrt{\frac{49}{40}}\Phi^{-1}(0,01) \right\}$$

(c) On choisit de rejeter H_0 au profit de H_1 si les observations sont dans la région critique, c'est-à-dire si la valeur observée de $\overline{\mathrm{X}_{40}}$ est plus basse que $77,41$, et on conserve H_0 sinon.

(d) Il se trouve que $79 > 77,41$. On ne rejette donc pas l'hypothèse H_0 au niveau 1%.

(3) On prend ici les affirmations de la compagnie pour argent comptant. Les variables observées suivent donc, on le sait à présent, la loi $\mathcal{N}(78, 49)$. Nous avions décidé d'indemniser les riverains dès lors que la moyenne des observations réalisées dépassait $77,41$; la probabilité recherchée est donc la probabilité pour qu'une variable de loi $\mathcal{N}\left(78, \frac{49}{40}\right)$ dépasse la valeur $77,41$, c'est-à-dire

$$\mathbf{P}\left(\overline{\mathrm{X}_{40}} > 77,41\right) = \mathbf{P}\left(\frac{\overline{\mathrm{X}_{40}} - 78}{\sqrt{\frac{49}{40}}} > \frac{77,41 - 78}{\sqrt{\frac{49}{40}}}\right) \approx 1 - \Phi\left(-0,533\right) = \Phi\left(0,533\right) = 0,703$$

d'après la table donnée dans la figure 1.

Exercice 2. (1) Il suffit de multiplier l'effectif présent à la fin de chaque ligne par les fréquences données en colonnes en arrondissant à l'unité la plus proche.

$\hat{n}_{i,j}$	SR	Non	Oui (non précis)	Oui (précis)	Effectifs
Classes populaires	0	37	7	9	53
Classes moyennes	0	39	15	44	98
Classes supérieures	2	9	15	73	99

(2) Il faut d'abord calculer les fréquences de chaque réponse sur la totalité de l'échantillon de 250 personnes, puis les multiplier par les fréquences d'appartenance à chaque classe sociale. Par exemple, la fréquence des non-réponses est égale à 0,008 et celle de l'appartenance aux classes populaires à 0,212, donc la fréquence théorique correspondante est $f_{1,1} = 0,008 \times 0,212 \approx 0,002$. On obtient le tableau suivant (dans lequel les fréquences ne se somment pas correctement à cause des erreurs d'arrondis) :

$f_{i,j}$	SR	Non	Oui (non précis)	Oui (précis)	f_{classe}
Classes populaires	0,002	0,072	0,031	0,107	0,212
Classes moyennes	0,003	0,133	0,058	0,198	0,392
Classes supérieures	0,003	0,135	0,059	0,200	0,396
$f_{\text{réponses}}$	0,008	0,34	0,148	0,504	

On obtient les effectifs théoriques correspondants en multipliant toutes les cases du tableau des fréquences théoriques par 250 :

$n_{i,j}$	SR	Non	Oui (non précis)	Oui (précis)
Classes populaires	0,5	18	7,75	26,75
Classes moyennes	0,75	33,25	14,5	49,5
Classes supérieures	0,75	33,75	14,75	50

(3) La statistique du χ^2 est

$$\mathrm{C} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} \frac{(n_{i,j} - \hat{n}_{i,j})^2}{n_{i,j}}$$

donc la contribution de chaque case (i, j) à cette statistique est égale à $\frac{(n_{i,j}-\hat{n}_{i,j})^2}{\hat{n}_{i,j}}$. Par exemple, la contribution de la case $(2, 2)$ (« Classes moyennes - Non ») est égale à

$$c_{2,2} = \frac{(39 - 33,25)^2}{33,25} \approx 0,994$$

Les contributions des différentes cases sont données ci-après :

$c_{i,j}$	SR	Non	Oui (non précis)	Oui (précis)
Classes populaires	0,5	20,056	0,726	11,778
Classes moyennes	0,75	0,994	0,017	0,611
Classes supérieures	2,083	18,15	0,004	10,58

(4) L'hypothèse H_0 est l'hypothèse d'indépendance : si l'on note $(\mathrm{X}_k, \mathrm{Y}_k)$ le couple de variables observées auprès de l'individu $k \in \{1, \ldots, 250\}$, avec X_k représentant l'appartenance à une classe sociale et Y_k la réponse apportée à la question posée, alors

$$\mathrm{H}_0 : \forall k \in \{1, \ldots, 250\}, \quad \mathrm{X}_k \text{ et } \mathrm{Y}_k \text{ sont indépendantes.}$$

On choisit ensuite simplement $\mathrm{H}_1 = \overline{\mathrm{H}_0}$. Le risque de première espèce est alors la probabilité de rejeter à tort l'hypothèse d'indépendance.
On sait que[2] sous H_0, la loi suivie par la statistique C est proche de la loi $\chi^2_{(3-1)(4-1)} = \chi^2_6$. On a donc pour tout $\alpha \in]0, 1]$ et $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\mathbf{P}_{\mathrm{H}_0}\left(\mathrm{C} > \mathrm{F}^{-1}_{\chi^2_6}(1-\alpha)\right) = 1 - \mathrm{F}_{\chi^2_6}\left(\mathrm{F}^{-1}_{\chi^2_6}(1-\alpha)\right) = \alpha$$

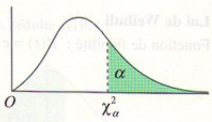
donc le test consistant à rejeter H_0 si et seulement si $\mathrm{C} > \mathrm{F}^{-1}_{\chi^2_6}(1-\alpha)$ est un test de niveau α de H_0 contre H_1. Notons que l'on choisit une zone de rejet du type $\{\mathrm{C} > \ldots\}$ puisque l'on veut rejeter l'hypothèse H_0 lorsque le contraste C est trop fort !
En choisissant par exemple $\alpha = 5\%$, on lit sur la figure 2 que l'on rejette

2. En réalité, c'est un peu plus compliqué : on considère généralement que l'on se trouve dans le domaine de validité de l'approximation par une loi du χ^2 lorsque la majeure partie des effectifs théoriques sont strictement supérieurs à 5. Cette règle empirico-arbitraire pour le moins floue rend potentiellement problématique la petitesse des effectifs théoriques de la colonne SR ; il suffit toutefois de censurer les données de cette colonne et de réaliser un test sur les données restantes (en utilisant cette fois la loi χ^2_4) pour se convaincre du fait que les résultats obtenus ne changent pas significativement.

Table de distribution de χ^2 (loi de K. Pearson)

La table donne la probabilité α, en fonction du nombre de degrés de liberté ν, pour que χ^2 égale ou dépasse une valeur donnée χ^2_α.

$$\alpha = P(\chi^2 \geqslant \chi^2_\alpha)$$



ν	$\alpha = 0{,}990$	$\alpha = 0{,}975$	$\alpha = 0{,}950$	$\alpha = 0{,}900$	$\alpha = 0{,}100$	$\alpha = 0{,}050$	$\alpha = 0{,}025$	$\alpha = 0{,}010$	$\alpha = 0{,}001$
1	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	2,71	3,84	5,02	6,63	10,83
2	0,02	0,05	0,10	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21	13,82
3	0,12	0,22	0,35	0,58	6,25	7,81	9,35	11,34	16,27
4	0,30	0,48	0,71	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28	18,47
5	0,55	0,83	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	20,52
6	0,87	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	22,46
7	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,47	24,32
8	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	26,13
9	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	27,88
10	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	29,59
11	3,05	3,82	4,57	5,58	17,27	19,67	21,92	24,72	31,26
12	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	32,91
13	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	34,53
14	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	36,12
15	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	37,70
16	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,84	32,00	39,25
17	6,41	7,56	8,67	10,08	24,77	27,59	30,19	33,41	40,79
18	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,80	42,31
19	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	43,82
20	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	45,32
21	8,90	10,28	11,59	13,24	29,61	32,67	35,48	38,93	46,80
22	9,54	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29	48,27
23	10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64	49,73
24	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,41	39,37	42,98	51,18
25	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31	52,62
26	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,88	41,92	45,64	54,05
27	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96	55,48
28	13,57	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,28	56,89
29	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59	58,30
30	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89	59,70

Quand ν est supérieur à 30, on utilise la table de la loi normale (table de l'écart réduit) avec :

$$t = \sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\nu - 1}$$

FIGURE 2. Table de la loi du χ^2

H_0 si et seulement si $C > 12{,}59$. La question précédente permet de voir que sur les observations réalisées on a $C \approx 66{,}249$, et donc que ces observations permettent de rejeter H_0.

(5) Pour calculer la p-valeur du test, il suffit de diminuer graduellement la valeur de α choisie ci-dessus et de relever à partir de quelle valeur de α il ne sera plus possible de rejeter le test au niveau α compte tenu des données dont on dispose. La figure 2 indique que cette valeur est (bien) inférieure à 0,001 puisque H_0 est encore rejeté au niveau 0,001. Cette observation conduit dont à rejeter très fortement (c'est-à-dire avec un très grand niveau de certitude) l'hypothèse d'indépendance.
Pour calculer explicitement la p-value, il suffit de remarquer qu'elle est atteinte lorsque

$$66{,}249 = F^{-1}_{\chi^2_6}(1 - \alpha)$$

et donc qu'elle vaut $\alpha = 1 - \mathrm{F}_{\chi^2_6}(66,249)$. Cette valeur est en réalité si proche de 0 qu'un logiciel de statistiques standard l'affiche avec une précision de 20 décimales comme étant égale à 0.
Insistons sur le fait que la p-value du test est dépendante des données observées et qu'elle ne peut en aucun cas être calculée indépendamment d'observations numériques concrètes !

Exercice 3. Pour tout $i \in \{1, \dots, 200\}$, on note X_i le nombre d'appels reçus au cours de la i-ème seconde. On suppose les X_i indépendantes et identiquement distribuées, et on cherche à tester

$$\mathrm{H}_0 \ : \mathrm{X}_1 \sim \mathcal{P}(3{,}7) \text{ contre } \mathrm{H}_1 \ = \overline{\mathrm{H}_0}$$

(1) On souhaite effectuer un test d'adéquation du χ^2. Pour que l'approximation classique sur la loi de la statistique de contraste soit valide, on considère d'ordinaire que chaque classe doit contenir strictement plus de 5 observations. On regroupe donc les observations des quatre dernières classes et on obtient le tableau suivant :

Classe	fréquence observée $\hat{p}_k$	fréquence théorique estimée p_k
C_0	$6/200 = 0,03$	$0,0247$
C_1	$15/200 = 0,075$	$0,0915$
C_2	$40/200 = 0,2$	$0,1692$
C_3	$42/200 = 0,21$	$0,2087$
C_4	$37/200 = 0,185$	$0,1931$
C_5	$30/200 = 0,15$	$0,1429$
C_6	$10/200 = 0,05$	$0,0881$
C_7	$9/200 = 0,045$	$0,0466$
C_8	$\frac{5+3+2+1}{200} = 11/200 = 0,055$	$0,0352$

Sous l'hypothèse H_0, on sait alors que

$$\mathrm{C} = 200 \sum_{k=0}^{8} \frac{(\hat{p}_k - p_k)^2}{p_k}$$

suit une loi proche de la loi $\chi^2_{9-1} = \chi^2_8$: on choisit donc de rejeter l'hypothèse H_0 si et seulement si $\mathrm{C} > \mathrm{F}^{-1}_{\chi^2_8}(0,95)$ (le raisonnement détaillé étant le même que dans l'exercice précédent), ce qui constitue un test de H_0 contre H_1 de niveau 5%. On obtient sur notre échantillon

$$\mathrm{C} \approx 7,60$$

et la table donnée dans la figure 2 nous permet de conclure que $\mathrm{C} \leqslant \mathrm{F}^{-1}_{\chi^2_8}(0,95)$: on ne rejette pas l'hypothèse d'adéquation H_0 au niveau 5%.

(2) On cherche cette fois à tester

$$\mathrm{H}_0 \ : \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^* \mid \mathrm{X}_1 \sim \mathcal{P}(\lambda) \text{ contre } \mathrm{H}_1 \ = \overline{\mathrm{H}_0}$$

Une subtilité supplémentaire apparaît dans les tests d'ajustement à une famille de lois : puisque l'éventuel paramètre λ tel que $\mathrm{X}_1 \sim \mathcal{P}(\lambda)$ est inconnu,

on ne connaît pas les fréquences théoriques des classes sous H_0. Pour résoudre cette difficulté, on estime dans un premier temps le paramètre λ sous H_0 en utilisant l'estimateur par substitution $\hat{\lambda}_n = \overline{X_n}$. Cet estimation est ensuite utilisée pour calculer les fréquences théoriques des différentes classes, mais la statistique C ainsi calculée ne suit plus qu'une loi du χ^2 dont le nombre de degrés de liberté est égal au nombre de classes *moins 2* (et non seulement moins 1 comme dans le cas où la loi de référence est connue).
On obtient sur l'échantillon $\hat{\lambda}_n = 3{,}7$, donc C a la même valeur que précédemment. La règle de décision adoptée ici consiste par contre à rejeter H_0 si et seulement si $C > F^{-1}_{\chi^2_7}(0,95)$. Cette fois encore, ce n'est pas le cas, et on rejette pas H_0 au niveau 5%. C'est plutôt rassurant : s'il est possible d'approcher la loi empirique du nombre d'appels par seconde par une loi de Poisson de paramètre 3,7, il est *a fortiori* possible de l'approcher par *une* loi de Poisson !

Exercice 4. (1) Appliquons directement le résultat du cours relatif au test d'égalité de moyennes de lois gaussiennes de variances inconnues : si $\alpha \in]0,1]$, on choisit de rejeter l'hypothèse $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ en faveur de l'hypothèse $H_1 = \overline{H_0}$ si et seulement si

$$\left| \frac{\overline{X_6} - \overline{Y_{300}}}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{6} + \frac{\sigma_Y^2}{300}}} \right| > \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

pour obtenir un test de niveau α de H_0 contre H_1. Notons que ce résultat est rendu possible par le fait que les écarts-types théoriques (et non seulement empiriques !) des distributions des deux échantillons sont connus, ce qui est une hypothèse médiocrement réaliste[3].

(2) La p-value du test est la borne inférieure de l'ensemble des $\alpha \in]0,1]$ tels que

$$\left| \frac{493 - 530}{\sqrt{\frac{187^2}{6} + \frac{300^2}{300}}} \right| > \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right),$$

c'est-à-dire l'unique valeur α telle que

$$\left| \frac{493 - 530}{\sqrt{\frac{187^2}{6} + \frac{300^2}{300}}} \right| = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right),$$

soit

$$\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \approx 0,473$$

ou encore

$$\alpha = 2(1 - \Phi(0,473)) \approx 0,6362.$$

Cette p-value est très haute : il est impossible de rejeter l'hypothèse d'égalité des moyennes avec un bon niveau de certitude.

3. On peut aller plus loin et remplacer les valeurs de σ_X et σ_Y par leurs estimateurs naturels débiaisés, mais le test fait alors intervenir des lois de Fisher.