Université Paris Cité — **Master 1 MFA - Probabilités**
2022-2023 — **Simon Coste - Cyril Labbé**

Devoir Maison n°1

Exercice 1.

a) Calculer la limite de la suite
$$\sum_{m\geq 1} \frac{n}{m}\sin(\frac{1}{nm}) \ .$$

b) Calculer la limite de la suite
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x^2}}{2\cos(\frac{x}{n})-1}\ \mathbb{1}_{\{3|\cos(\frac{x}{n})|\geq 2\}}\ dx \ .$$

c) Ré-exprimer l'intégrale suivante sous la forme d'une série "simple"
$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{e^x-1}dx \ .$$

d) Calculer la limite de la suite
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx^n)}{nx^{n+1/2}}dx \ .$$

Solution de l'exercice 1.

a) On applique le théorème de convergence dominée dans l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ où μ est la mesure de comptage. Pour $n, m \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n(m) = \frac{n}{m}\sin(\frac{1}{nm})$. Cette suite de fonctions mesurables satisfait les hypothèses du théorème de convergence dominée. En effet $|f_n(m)| \leq \frac{1}{m^2}$, le membre de droite est une fonction positive intégrable (d'intégrale $\frac{\pi^2}{6}$) et pour tout $m \geq 1$ $f_n(m) \to_{n\to\infty} \frac{1}{m^2}$. On en déduit $\sum_{m\geq 1}\frac{n}{m}\sin(\frac{1}{nm}) = \int_{\mathbb{N}^*} f_n d\mu \to \sum_{m\geq 1}\frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

b) Soit f_n la fonction à intégrer, et $g_n(x) = \mathbb{1}_{\{3|\cos(\frac{x}{n})|\geq 2\}} e^{-x^2}$. Ces fonctions boréliennes vérifient pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leq 3g_n(x) \leq 3e^{-x^2}$. La fonction $x \mapsto 3e^{-x^2}$ est intégrable et pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f_n(x) \to e^{-x^2}$ quand $n \to \infty$. Par convergence dominée on conclut que $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx$.

c) On a
$$\frac{1}{e^x-1} = e^{-x}\frac{1}{1-e^{-x}} = e^{-x}\sum_{k\geq 0} e^{-xk} = \sum_{k\geq 1} e^{-xk} \ .$$
Or
$$\int_0^\infty |\sin(ax)e^{-xk}|dx \leq \int_0^\infty |a|xe^{-xk}dx = |a|\frac{1}{k^2} \ .$$

On peut donc appliquer le théorème de Fubini à la fonction $(k,x) \mapsto \sin(ax)e^{-xk}$ sur l'espace $(\mathbb{N}^* \times (0,\infty), \mathcal{P}(\mathbb{N}^*) \otimes \mathcal{B}((0,\infty)), \mu \otimes \lambda)$ où μ est la mesure de comptage et λ la mesure de Lebesgue :

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} dx = \sum_{k \geq 1} \int_0^\infty \sin(ax)e^{-xk} dx \ .$$

Or

$$\int_0^\infty \sin(ax)e^{-xk} dx = \mathrm{Im}\,(\int_0^\infty e^{iax}e^{-xk}dx) = \mathrm{Im}\,(\frac{1}{k-ia}) = \frac{a}{k^2+a^2} \ .$$

D'où

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{e^x-1} dx = \sum_{k\geq 1} \frac{a}{k^2+a^2} \ .$$

d) En utilisant l'inégalité $|\sin x| \leq |x| \wedge 1$, on obtient la domination

$$\forall x > 0, \forall n \geq 1, \ |f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \mathbb{1}_{\{x<1\}} + \frac{1}{x^{3/2}} \mathbb{1}_{\{x \geq 1\}} \ .$$

Ainsi les fonctions f_n sont dominées par une fonction intégrable. Par ailleurs si $x \geq 1$,

$$|f_n(x)| \leq \left| \frac{1}{nx^{n+1/2}} \right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et si $0 < x < 1$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{x}}$. Par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$

Exercice 2. On souhaite prouver que les fonctions continues à support compact sont denses dans $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ où λ désigne la mesure de Lebesgue. On admettra le fait suivant : pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \lambda(A) &= \inf\{\lambda(O) : O \text{ ouvert }, A \subset O\} \\ &= \sup\{\lambda(K) : K \text{ compact }, K \subset A\} \end{aligned}$$

Dans tout l'exercice, on travaille sur $\mathbb{R}$.

a) Soient K un compact et O un ouvert tels que $K \subset O$. Montrer par l'absurde que la distance de K à O^c est strictement positive, c'est-à-dire, $\inf\{|x-y| : x \in K, y \in O^c\} > 0$.

b) Montrer que pour tout compact K et tout ouvert O tels que $K \subset O$ il existe une fonction φ continue à support compact telle que $\mathbf{1}_K \leq \varphi \leq \mathbf{1}_O$.

c) En déduire que pour tout borélien A de mesure de Lebesgue finie, la fonction $\mathbf{1}_A$ est la limite dans L^1 d'une suite de fonctions continues à support compact.

d) Montrer que pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, il existe une suite de fonctions étagées f_n telles que $\|f - f_n\|_{L^1} \to 0$.

e) En déduire que pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, il existe une suite de fonctions continues à support compact φ_n telle que $\|f - \varphi_n\|_{L^1} \to 0$.

Solution de l'exercice 2.

a) On suppose que $\inf\{|x-y| : x \in K, y \in O^c\} = 0$. Soit $(x_n, y_n)_n$ une suite de points tels que $|x_n - y_n| \to 0$. Comme $(x_n)_n$ appartient au compact K, on peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_k$ qui converge vers $x \in K$. Nécessairement $(y_{n_k})_k$ converge également vers x. Or cette suite appartient au fermé O^c donc $x \in O^c$. Or $K \cap O^c = \emptyset$ d'où la contradiction.

b) Soit $d(x, O^c)$ la distance entre x et O^c. On peut considérer la fonction

$$x \mapsto (1 - \frac{d(x,K)}{\varepsilon})_+$$

Cette fonction est positive, à support compact et vaut 1 sur K, donc est minorée par $\mathbf{1}_K$. Dès que $\varepsilon < d(K, O^c)$, on voit que cette fonction s'annule sur O^c. Comme elle est bornée par 1, on en déduit que pour de tels ϵ elle est majorée par $\mathbf{1}_O$.

c) Soit A un borélien de mesure de Lebesgue finie. Le fait admis dans l'énoncé assure qu'on peut trouver une suite d'ouverts O_n et une suite de compacts K_n tels que $K_n \subset A \subset O_n$ et $\lambda(O_n \backslash K_n) \leq 1/n$. Par la question précédente, on peut trouver φ_n continue à support compact telle que $\mathbf{1}_{K_n} \leq \varphi_n \leq \mathbf{1}_{O_n}$. Ainsi

$$-\mathbf{1}_{O_n \backslash K_n} \leq -\mathbf{1}_{A \backslash K_n} = \mathbf{1}_{K_n} - \mathbf{1}_A \leq \varphi_n - \mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_{O_n} - \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_{O_n \backslash A} \leq \mathbf{1}_{O_n \backslash K_n} .$$

On en déduit que

$$\|\varphi_n - \mathbf{1}_A\|_1 \leq \|\mathbf{1}_{O_n \backslash K_n}\|_1 = \mu(O_n \backslash K_n) \leq 1/n ,$$

et le résultat s'en suit.

d) On écrit $f = f_+ - f_-$ avec $f_+ := \max(0, f)$ et $f_- = -\max(0, -f)$. On sait qu'il existe deux suites croissantes de fonctions étagées positives g_n et h_n telles que

$$g_n \uparrow f_+ , \quad h_n \uparrow f_- .$$

Comme $f \in L^1$, f_+ et f_- sont également dans L^1, et nécessairement g_n et h_n y sont aussi. Ainsi en posant $f_n := g_n - h_n$ on trouve

$$\|f - f_n\|_1 \leq \|f_+ - g_n\|_1 + \|f_- - h_n\|_1 ,$$

et ces deux termes convergent vers 0 par convergence monotone.

e) Par la question précédente il existe une suite de fonctions étagées f_n convergeant vers f dans L^1. Pour tout n, f_n est une fonction étagée dans L^1, c'est donc une combinaison linéaire d'indicatrices de Boréliens dont les mesures de Lebesgue sont *finies*. Ainsi on peut trouver une fonction continue à support compact φ_n telle que $\|f_n - \varphi_n\|_1 \leq 1/n$. Ainsi

$$\|f - \varphi_n\|_1 \leq \|f - f_n\|_1 + \|f_n - \varphi_n\|_1 \leq \|f - f_n\|_1 + 1/n ,$$

et le résultat s'en suit.

Exercice 3. On se donne $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, avec $\mu(E) < +\infty$, f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$, ainsi qu'une suite de fonctions mesurables $(f_n)_{n\geq 1}$ convergeant vers f μ-presque partout. On souhaite prouver le résultat suivant, appelé Théorème d'Egoroff : pour tout $\delta > 0$, on peut trouver un ensemble mesurable, dont le complémentaire est de mesure au plus δ, et sur lequel la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge **uniformément** vers f.

a) Soit $\varepsilon > 0$. On définit, pour $n \geq 1$, $A_n^\varepsilon = \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}$. Que vaut $\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n^\varepsilon\right)$?

b) En déduire que pour tout $\delta > 0$, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A^c) \leq \delta$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tels que
$$\forall n \geq N \quad \forall x \in A \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

c) En déduire que pour tout $\delta > 0$ il existe $B \in \mathcal{A}$ vérifiant $\mu(B^c) \leq \delta$ et $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur B.

On remarquera que ce théorème a pour conséquence le fait suivant. Soient $a < b$ deux réels, et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ mesurable. Pour tout $\delta > 0$, il existe $A \in \mathcal{B}(]a, b[)$ vérifiant $\lambda(A^c) \leq \delta$ (λ désignant la mesure de Lebesgue) et tel que $f_{|A}$ soit continue. En effet, toute fonction mesurable est limite λ-presque partout d'une suite de fonctions continues à support compact, et l'on peut utiliser le théorème d'Egoroff.

Solution de l'exercice 3.

a) Soit $x \in \limsup_{n\to\infty} A_n^\varepsilon$. Par définition, pour une infinité de $n \geq 1$, $|f_n(x) - f(x)| > \varepsilon$ et ainsi $(f_n(x))_{n\geq 1}$ ne converge pas vers $f(x)$, et donc x appartient à l'ensemble C de mesure nulle sur lequel f_n ne converge pas vers f. On a donc prouvé que $\limsup_{n\to\infty} A_n^\varepsilon \subset C$ et donc $\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n^\varepsilon\right) = 0$.

b) Soit $\delta > 0$, il existe $N \geq 1$ tel que $\mu\left(\cup_{k\geq N} A_k^\varepsilon\right) < \delta$. Ainsi l'ensemble $A := \left(\cup_{k\geq N} A_k^\varepsilon\right)^c$ vérifie $\mu(A^c) < \delta$ et pour tout $x \in A$, pour tout $n \geq N$
$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

c) Soit $\delta > 0$. Pour tout $k \geq 1$, par la question précédente on peut trouver $A(k) \in \mathcal{A}$ et $N(k) \geq 1$ tels que $\mu(A(k)^c) < \delta 2^{-k}$ et
$$\forall n \geq N(k) \quad \forall x \in A(k) \quad |f_n(x) - f(x)| \leq 2^{-k}.$$

On pose alors $B := \cap_k A(k)$. On remarque que $\mu(B^c) \leq \sum_k \mu(A(k)^c) \leq \delta$. Par ailleurs, pour tout $k \geq 1$ et pour tout $n \geq N(k)$
$$\sup_{x\in B} |f_n(x) - f(x)| < 2^{-k} ,$$

ainsi
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in B} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$