UNIVERSITÉ PARIS CITÉ
2022-2023

MASTER 1 MFA - PROBABILITÉS
SIMON COSTE - CYRIL LABBÉ

Devoir Maison n°2

Exercice 1. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles, de densité

$$p(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \exp\{-y\} \, \mathbb{1}_D(x,y)$$

avec $D = \{(x,y) : 0 < x < y^2, y > 0\}$.

a) Calculer $\mathbb{E}[X \mid Y]$ et $\mathbb{E}[Y \mid X]$. Que vaut $\mathbb{E}[XY^{-2}]$?

b) On pose $U = \sqrt{X}, V = Y - \sqrt{X}$. Calculer la densité du couple (U, V).

c) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
Les variables U et V sont-elles indépendantes ?

d) Quelles sont les lois des variables X, Y, U, V ?

Exercice 2. Soit $(X_i, i \geq 1)$ une suite de v.a.r. i.i.d. de densité

$$p(x) = ax^{-(a+1)} \mathbb{1}_{]1,\infty[}(x) \ ,$$

avec $a > 0$. On pose

$$M_n = \max\{X_i; i = 1, \ldots, n\} \ .$$

a) Pour $u \in \mathbb{R}$, calculer $\mathbb{P}(M_n \leq u)$. En déduire que la v.a. M_n a une densité que l'on calculera.

b) Calculer la valeur de $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(M_n \leq n^{1/a}x)$ avec $x > 0$.

c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. Montrer que la suite $n^{-1/a}M_n$ converge en loi vers une limite que l'on déterminera (on pourra utiliser la densité de M_n obtenue au a).

d) Soit $(Y_i)_{i\geq 1}$ une suite de v.a. réelles i.i.d. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite déterministe qui tend vers l'infini. Montrer que si $\max(Y_1, \ldots, Y_n)/u_n$ converge presque sûrement vers une limite quand $n \to \infty$ alors cette limite est nécessairement constante presque sûrement (éventuellement égale à l'infini).

e) La suite $n^{-1/a}M_n$ converge-t-elle presque sûrement ?