UNIVERSITÉ PARIS CITÉ
2022-2023

MASTER 1 MFA - PROBABILITÉS
SIMON COSTE - CYRIL LABBÉ

Devoir Maison n°2

Exercice 1. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles, de densité

$$p(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \exp\{-y\} \, \mathbb{1}_D(x,y)$$

avec $D = \{(x,y) : 0 < x < y^2, y > 0\}$.

a) Calculer $\mathbb{E}[X \mid Y]$ et $\mathbb{E}[Y \mid X]$. Que vaut $\mathbb{E}[XY^{-2}]$?

b) On pose $U = \sqrt{X}, V = Y - \sqrt{X}$. Calculer la densité du couple (U, V).

c) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
Les variables U et V sont-elles indépendantes ?

d) Quelles sont les lois des variables X, Y, U, V ?

Solution de l'exercice 1.

a) Tout d'abord, on peut vérifier, en estimant les comportements asymptotiques de la densité p, que X et Y sont dans L^1 donc leur espérance conditionnelle (version L^1) est bien définie. (En fait, ces v.a. sont positives et ainsi leur espérance conditionnelle (version ≥ 0) est bien définie). On a $\mathbb{E}[X \mid Y] = \Phi(Y)$ avec

$$\Phi(y) = \frac{1}{\int_x p(x,y)dx} \int xp(x,y)dx \ , \quad y > 0 \ .$$

Un calcul simple montre que $\Phi(y) = y^2/3$. De même, $\mathbb{E}[Y \mid X] = \Psi(X)$ avec

$$\Psi(x) = \frac{1}{\int_y p(x,y)dy} \int yp(x,y)dy \ , \quad x > 0 \ .$$

Un calcul simple montre que $\Psi(x) = 1 + \sqrt{x}$.
On calcule

$$\mathbb{E}[X/Y^2] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X/Y^2 \mid Y]] = \mathbb{E}[Y^{-2}\mathbb{E}[X \mid Y]] = \mathbb{E}[Y^{-2}Y^2/3] = 1/3 \ ,$$

où l'on a utilisé une propriété de l'espérance conditionnelle. Là encore, l'espérance conditionelle est bien définie car X/Y^2 est une v.a. positive (et même intégrable, cela se voit sur la densité).

b) En suivant l'énoncé, on considère l'application $\Phi : (x,y) \mapsto (u,v)$, avec $u = \sqrt{x}$ et $v = y - \sqrt{x}$, définie sur D et à valeurs dans $]0, +\infty[^2$. Cette application est bijective, d'inverse $\Phi^{-1}(u,v) = (x,y)$ donnée par

$$x = u^2 \ , \qquad y = v + u \ .$$

On constate que Φ est indéfiniment différentiable ainsi que Φ^{-1}, et on calcule le déterminant jacobien

$$\mathrm{Jac}(\Phi^{-1})(u,v) = \det \begin{pmatrix} 2u & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2u > 0$$

D'après la formule de changement de variables différentiable, le couple (U,V) a pour densité

$$\begin{aligned} p_{U,V}(u,v) &= p_{X,Y}(\Phi^{-1}(u,v)) \times |\mathrm{Jac}(\Phi^{-1})(u,v)| \times \mathbb{1}_{]0,\infty[^2}(u,v) \\ &= e^{-u}\mathbb{1}_{]0,\infty[}(u) \times e^{-v}\mathbb{1}_{]0,\infty[}(v) \end{aligned}$$

On reconnait le produit de deux densités exponentielles de paramètre 1.

c) Les variables U et V sont donc indépendantes (et de loi exponentielle). Par contre, les variables X et Y ne sont pas indépendantes car la fonction indicatrice de D ne peut pas se mettre sous forme produit. Plus précisément, $\mathbb{P}(X > 1 > Y^2) = 0$ alors que $\mathbb{P}(X > 1)$ et $\mathbb{P}(Y^2 < 1)$ sont clairement strictement positives.

d) On a déjà remarqué que U et V suivent la loi exponentielle de paramètre 1. On calcule la densité de Y par la formule des marginales,

$$p_Y(y) = \int p_{X,Y}(x,y)dx = e^{-y}\mathbb{1}_{y>0} \int_0^{y^2} \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = e^{-y}\mathbb{1}_{y>0}\Big[\sqrt{x}\Big]_0^{y^2} = ye^{-y}\mathbb{1}_{y>0} \ ,$$

c'est-à-dire une loi gamma $\Gamma(\alpha = 2, \beta = 1)$. De même, la densité de X est

$$p_X(x) = \int p_{X,Y}(x,y)dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathbb{1}_{x>0}\Big[-e^{-y}\Big]_{\sqrt{x}}^{+\infty} = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}\mathbb{1}_{x>0}$$

Exercice 2. Soit $(X_i, i \geq 1)$ une suite de v.a.r. i.i.d. de densité

$$p(x) = ax^{-(a+1)}\mathbb{1}_{]1,\infty[}(x) \ ,$$

avec $a > 0$. On pose

$$M_n = \max\{X_i; i = 1, \dots, n\} \ .$$

a) Pour $u \in \mathbb{R}$, calculer $\mathbb{P}(M_n \leq u)$. En déduire que la v.a. M_n a une densité que l'on calculera.

b) Calculer la valeur de $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(M_n \leq n^{1/a}x)$ avec $x > 0$.

c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. Montrer que la suite $n^{-1/a}M_n$ converge en loi vers une limite que l'on déterminera (on pourra utiliser la densité de M_n obtenue au a).

d) Soit $(Y_i)_{i\geq 1}$ une suite de v.a. réelles i.i.d. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite déterministe qui tend vers l'infini. Montrer que si $\max(Y_1, \dots, Y_n)/u_n$ converge presque sûrement vers une limite quand $n \to \infty$ alors cette limite est nécessairement constante presque sûrement (éventuellement égale à l'infini).

e) La suite $n^{-1/a}M_n$ converge-t-elle presque sûrement ?

Solution de l'exercice 2.

a) Pour tout $u \in \mathbb{R}$, en utilisant le fait que les $(X_i)_{i\geq 1}$ sont i.i.d., on a

$$F_n(u) \;=\; \mathbb{P}(M_n \leq u) \;=\; \mathbb{P}(\cap_{i=1}^n \{X_i \leq u\}) \;=\; \mathbb{P}(X_1 \leq u)^n \;=\; \mathbb{1}_{[1,\infty[}(u)(1-u^{-\alpha})^n\,.$$

On pose donc pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$f_n(u) \;=\; \mathbb{1}_{]1,\infty[}(u) n\alpha u^{-(\alpha+1)}(1-u^{-\alpha})^{n-1}\,.$$

On vérifie facilement que la fonction f_n est continue et positive, et que F_n est dérivable en tout point, de dérivée égale à f_n. Cela suffit à déduire que $F_n(u) = \int_{]-\infty,u]} f_n(v)dv$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, et qu'ainsi f_n est la densité de la loi de M_n.

b) Soit $x > 0$, on a pour n assez grand

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M_n \leq n^{1/\alpha}x) \;&=\; \mathbb{1}_{[1,\infty[}(n^{1/\alpha}x)\left(1-\frac{x^{-\alpha}}{n}\right)^n \;=\; \mathbb{1}_{[n^{-1/\alpha},\infty[}(x)\exp\left[n\ln(1-\frac{x^{-\alpha}}{n})\right] \\
&=\; \mathbb{1}_{[n^{-1/\alpha},\infty[}(x)\exp[-x^{-\alpha}+o(1)] \\
&\longrightarrow \mathbb{1}_{]0,\infty[}(x)\exp(-x^{-\alpha}) \;=\; \exp(-x^{-\alpha})
\end{aligned}$$

quand n tend vers l'infini.

c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(n^{-1/\alpha}M_n)] \;&=\; \int_{\mathbb{R}} f(n^{-1/\alpha}u)f_n(u)\,du \;=\; \int_{\mathbb{R}} f(n^{-1/\alpha}u)\mathbb{1}_{]1,\infty[}(u)n\alpha u^{-(\alpha+1)}(1-u^{-\alpha})^{n-1}\,du \\
&=\; \int_{\mathbb{R}} f(v)g_n(v)\,dv\,,
\end{aligned}$$

où, pour tout $v \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
g_n(v) \;&=\; \mathbb{1}_{]n^{-1/\alpha},\infty[}(v)\alpha v^{-(\alpha+1)}\left(1-\frac{v^{-\alpha}}{n}\right)^{n-1} \\
&=\; \mathbb{1}_{]n^{-1/\alpha},\infty[}(v)\alpha v^{-(\alpha+1)}\exp\left[(n-1)\ln\left(1-\frac{v^{-\alpha}}{n}\right)\right]\,.
\end{aligned}$$

Comme à la question précédente, on montre que pour tout $v \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} g_n(v) \;=\; g_\infty(v) \;:=\; \mathbb{1}_{]0,\infty[}(v)\alpha v^{-(\alpha+1)}\exp(-v^{-\alpha})$$

et donc $f(v)g_n(v) \to f(v)g_\infty(v)$. De plus, pour tout $u \in \mathbb{R}^{+*}$, on a $\ln u \leq u-1$, donc pour tout $n \geq 2$ et $v > n^{-1/\alpha}$, on a

$$(n-1)\ln\left(1-\frac{v^{-\alpha}}{n}\right) \;\leq\; -v^{-\alpha}\frac{n-1}{n} \;\leq\; -\frac{v^{-\alpha}}{2}\,.$$

On en déduit que pour tout $n \geq 2$, pour tout $v \in \mathbb{R}$,

$$|f(v)g_n(v)| \;\leq\; \|f\|_\infty \mathbb{1}_{]0,\infty[}(v)\alpha v^{-(1+\alpha)}\exp\left(-\frac{v^{-\alpha}}{2}\right) \;:=\; h(v)\,.$$

La fonction h est bien intégrable :

- au voisinage de $+\infty$, car $h(v)$ est équivalent à $\|f\|_\infty \alpha v^{-(1+\alpha)}$ (notez que $v^{-\alpha} \to 0$ donc $\exp(-v^{-\alpha}/2) \to 1$) qui est intégrable au voisinage de $+\infty$ car $\alpha > 0$;
- quand v tend vers 0, $u = v^{-\alpha} \to +\infty$, et donc $v^{-(\alpha+1)} \exp\left(-v^{-\alpha}/2\right) = u^{(1+\alpha)/\alpha} \exp(-u/2) \to 0$, d'où $h(v) \to 0$ et donc h est bien intégrable au voisinage de 0.

Par le théorème de convergence dominée, on en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(n^{-1/\alpha} M_n)] \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(v) g_n(v)\, dv \;=\; \int_{\mathbb{R}} f(v) g_\infty(v)\, dv\,.$$

On vérifie que g_∞ est une densité de probabilité : c'est une fonction mesurable, positive, intégrable et telle que

$$\int_{\mathbb{R}} g_\infty(v)\, dv \;=\; \int_{]0,\infty[} \alpha v^{-(1+\alpha)} \exp\left(-v^{-\alpha}\right)\, dv \;=\; \left[\exp\left(-v^{-\alpha}\right)\right]_0^\infty \;=\; 1\,.$$

Soit Z une variable aléatoire réelle de densité g_∞ par rapport à la mesure de Lebesgue : on vient de montrer que pour toute fonction continue bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(n^{-1/\alpha} M_n)] \;=\; \mathbb{E}[f(Z)]$$

ce qui signifie que $n^{-1/\alpha} M_n$ converge en loi vers la variable Z.

d) La limite p.s. de $\max(Y_1, \ldots, Y_n)/u_n$, que l'on notera U, appartient à la tribu $\mathcal{G}_\infty := \cap_{k\geq 1} \sigma(Y_k, Y_{k+1}, \ldots)$. Par la loi du zéro-un de Kolmogorov, cette tribu est triviale et ainsi chaque événement $\{U \leq t\}$ est de proba égale à 0 ou 1. On en déduit que U est nécessairement une v.a. constante presque sûrement.

e) Supposons que $n^{-1/\alpha} M_n$ converge p.s. vers Z. Z admet alors pour densité g_∞. Par la question précédente, Z est une v.a. constante p.s, ce qui est faux (car elle admet une densité).