Graphes probabilistes

Pierre Montagnon, Simon Coste

2020 - 2021

Un graphe probabiliste est un graphe constitué de sommets correspondant à des états d'une variable et d'arêtes orientées correspondant à des changements d'état de cette variable, effectués avec une certaine probabilité.

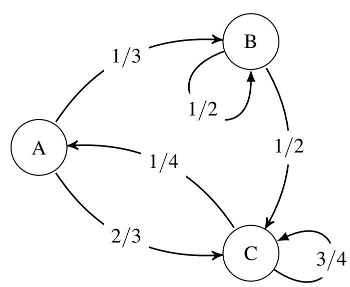


FIGURE 1 – Exemple de graphe probabiliste. Lorsqu'elle est dans l'état A à l'étape n, la variable se trouve à l'étape $n+1$ dans l'état B avec probabilité $1/3$ et dans l'état C avec probabilité $2/3$.

On note $p_{i,j}$ la probabilité (dite *probabilité de transition de i à j*) pour que la variable se trouve dans l'état j à l'étape $n+1$ sachant qu'elle se trouve dans l'état i à l'étape n. Dans la figure 1, on a par exemple $p_{A,B} = 1/3$. Une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rendant compte des états de la variable aux temps successifs $1,\dots,n,\dots$ est appelée *chaîne de Markov* associée au graphe probabiliste. Pour une telle chaîne et pour tout état i et tout état j, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = p_{i,j}$$

On suppose désormais que les états possibles de la variable sont numérotés par $1,\dots,N$ (typiquement, à l'agrégation, $N = 2$ ou $N = 3$). On appelle *matrice de transition* associée au graphe probabiliste (ou à la chaîne de Markov) la matrice $M = (p_{i,j})_{i,j\in[\![1,N]\!]}$ de $\mathscr{M}_N(\mathbb{R})$, c'est-à-dire

$$M = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,N} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,N} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ p_{N,1} & \cdots & \cdots & p_{N,N} \end{pmatrix}$$

Dans le cas de la figure 1, en numérotant $1,2$ et 3 les états respectifs A, B et C, on a

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Les propriétés importantes des matrices de transition sont les suivantes :

Théorème 1 (Propriétés des matrices de transition) Si $M = (p_{i,j})_{i,j \in [\![1,N]\!]}$ est la matrice de transition de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors :

(i) M est une matrice stochastique, c'est-à-dire une matrice à coefficients positifs dont la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1.

(ii) M et ${}^tM$ admettent 1 pour valeur propre.

(iii) En notant P_n la loi de probabilité de la chaîne de Markov à l'instant n, c'est-à-dire

$$P_n = (\mathbb{P}(X_n = 1), \mathbb{P}(X_n = 2), \ldots, \mathbb{P}(X_n = N))$$

on a la relation suivante :

$$P_{n+1} = P_0 M$$

et donc, par récurrence, $P_n = P_0 M^n$.

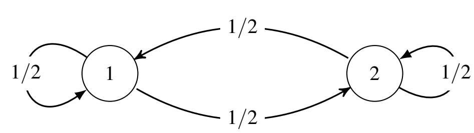
Exercice 1 Vérifier que si $p = (p_1, \ldots, p_N)$ est un vecteur de probabilité et M une matrice de transition, alors pM est encore un vecteur de probabilité.

Avec les notations ci-dessus, on appelle *loi stable* ou *loi invariante* ou encore *loi stationnaire* pour la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un vecteur $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n) \in \mathbb{R}^N$ à coordonnées positives et de somme 1 tel que $\pi M = \pi$. D'après ce qui précède, si la loi de X_0 est donnée par π (c'est-à-dire si $P_0 = \pi$), alors la loi de X_n est donnée par π pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Le résultat principal de la théorie des graphes probabilistes est le suivant, dans une version simple : s'il est possible d'accéder à chaque état depuis chaque autre état, alors il existe une unique loi invariante π, et de plus, quelle que soit la loi de probabilité P_0 de l'état initial, X_n converge en loi vers une variable aléatoire de loi π, autrement dit : pour tout état x,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = x) = \pi_x.$$

Exercice 2 (Exemple)

1. Donner la matrice de transition associée au graphe probabiliste suivant :



   Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov associée à ce graphe, donner la loi de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ en fonction de $\mathbb{P}(X_0 = 1)$. Montrer que la loi uniforme sur $\{1,2\}$ est une loi stable pour cette chaîne de Markov.

2. Déterminer une loi invariante pour la chaîne de Markov associée au graphe probabiliste de la figure 1.

3. En diagonalisant la matrice M, déterminer la loi de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ lorsque $X_0 = A$ dans le cas du graphe probabiliste de la figure 1.