VARIABLES ALÉATOIRES RÉELLES

Exercice 1 Soit M une matrice hermitienne réelle de taille $n \times n$, dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

a) Calculer $Z_M = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle x, Mx\rangle/2} \mathrm{d}x$.

b) On pose $p(x) = Z_M^{-1} e^{-\langle x, Mx\rangle/2}$; il s'agit de la densité d'une loi Gaussienne, dont les paramètres seront déterminés ci-dessous.

   i) Calculer $\int_{\mathbb{R}^n} xp(x)\mathrm{dx}$ (espérance).

   ii) Calculer $\int_{\mathbb{R}^n} xx^\top p(x)\mathrm{dx}$ (matrice de covariance).

   iii) Calculer $\int_{\mathbb{R}^n} \ln(p(x))p(x)\mathrm{dx}$ (opposé de l'entropie).

Exercice 2 (Lois usuelles). Dans chaque cas, calculer $\mathbb{E}[X], \mathrm{Var}(X), \mathbb{E}[e^{tX}]$ si cela existe.

a) $X \sim \mathcal{U}(n)$ (Uniforme sur $\{1, \dots, n\}$).

b) $X \sim \mathcal{B}(p)$ (Bernoulli de paramètre p).

c) $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ (Binômiale de paramètres n et p).

d) $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ (Poisson de paramètre λ).

e) $X \sim \mathcal{G}(p)$ (Géométrique de paramètre de succès p).

f) $X \sim \mathcal{U}(a, b)$ (Uniforme sur $[a, b]$).

g) $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ (Exponentielle de paramètre λ).

h) $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ (Normale de paramètres μ et σ^2).

i) $X \sim \Gamma(r, \lambda)$ (Gamma de paramètres r et λ).

j) $X \sim \mathcal{C}(\lambda)$ (Cauchy de paramètre λ).

Exercice 3 (Changements de variables). Dans chacun des cas suivants, montrer que la variable aléatoire Y admet une densité que l'on explicitera.

a) $Y = \exp(-X)$ avec $X \sim \mathcal{E}(1)$.

b) $Y = \tan(X)$ avec $X \sim \mathcal{U}\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

c) $Y = 1/X$ avec $X \sim \mathcal{C}(\lambda)$.

d) $Y = X^2$ avec $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

e) $Y = aX + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et X de densité f quelconque.

f) $Y = \frac{1}{X} - \left\lfloor \frac{1}{X} \right\rfloor$ avec X de densité $x \mapsto \frac{1}{\ln(2)} \frac{1}{1+x} \mathbf{1}_{(0,1)}(x)$.

Exercice 4 (Entropie discrète) Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé discret. Si X est une variable aléatoire sur Ω, l'entropie de sa loi est le nombre réel défini par

$$H = -\mathbb{E}[\ln \mathbb{P}(X)] = -\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(X = \omega) \ln \mathbb{P}(X = \omega).$$

a) Montrer que l'entropie est bien définie, et qu'elle est positive. Calculer l'entropie de quelques lois discrètes connues.

b) Soit Y une autre variable aléatoire discrète sur le même espace. Montrer que la quantité

$$-\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(X = \omega) \ln \mathbb{P}(Y = \omega)$$

est toujours plus grande que H.

Exercice 5 (Entropie continue) Si X est une variable aléatoire réelle de densité p, son entropie est définie par

$$H = -\mathbb{E}[\ln p(X)] = -\int_{\mathbb{R}} p(x) \ln p(x) \mathrm{d}x.$$

Vérifier que cette quantité est bien définie, positive, et calculer l'entropie de quelques lois à densité connues (par exemple, celles de l'exercice 2).

Exercice 6 (Intégration par parties gaussienne). Soit X une variable de loi $\mathcal{N}(0,1)$, et soit $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\mathbb{E}\left[|h'(X)|\right] < \infty$.

a) Montrer que $\mathbb{E}\left[|Xh(X)|\right] < \infty$.

b) Montrer que $h(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \to 0$ lorsque $x \to \pm\infty$.

c) Établir la formule d'intégration par parties gaussienne :

$$\mathbb{E}\left[Xh(X)\right] \quad = \quad \mathbb{E}\left[h'(X)\right].$$

d) En déduire $\mathbb{E}[X^n]$ pour tout $n \geq 0$.

e) Généraliser cet exercice au cas où X est une variable gaussienne générale.

Exercice 7 (Absence de mémoire). Soit X une variable aléatoire positive. On dit que X (ou plutôt sa loi) a la propriété d'*absence de mémoire* si pour tout $s, t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X > t + s) \quad = \quad \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(X > s).$$

a) Vérifier que la loi Exponentielle a la propriété d'absence de mémoire.

b) Trouver toutes les lois qui ont la propriété d'absence de mémoire.

Exercice 8 (Atomes). Soit X une variable aléatoire réelle, et soit

$$\mathcal{A} \quad := \quad \{x \in \mathbb{R} \colon \mathbb{P}(X = x) > 0\}.$$

a) Montrer que $\mathcal{A}$ est au plus dénombrable.

b) Montrer que si X admet une densité, alors $\mathcal{A} = \emptyset$.

c) On suppose que $\mathcal{A} = \emptyset$. Montrer que $F_X(X)$ suit la loi uniforme sur $(0,1)$.

Exercice 9 (Un classique). Soit X une variable aléatoire positive.

a) Justifier l'identité suivante :

$$\mathbb{E}[X] \quad = \quad \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)\, \mathrm{d}t.$$

b) Que donne cette formule dans le cas particulier où X est à valeurs dans $\mathbb{N}$?

c) Montrer plus généralement que pour tout $0 < p < \infty$, on a

$$\mathbb{E}[X^p] \quad = \quad p \int_0^\infty t^{p-1}\, \mathbb{P}(X > t)\, \mathrm{d}t.$$

d) Montrer que si X est dans L^p, alors $\mathbb{P}(X > t) = o(t^{-p})$ lorsque $t \to \infty$.

Exercice 10 (Théorème de Stone-Weierstrass). Soit $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

a) Vérifier que pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $[0,1]$ et tout $\delta > 0$,

$$\mathbb{E}\left[|f(X) - f\left(\mathbb{E}[X]\right)|\right] \quad \leq \quad \frac{2\|f\|_\infty \mathrm{Var}(X)}{\delta^2} + \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|.$$

b) En déduire que les polynômes $(B_n)_{n \geq 1}$ convergent uniformément vers f, où

$$B_n(t) \quad := \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) t^k (1-t)^{n-k}.$$

c) Étendre ce résultat au cas où $[0,1]$ est remplacé par un segment $[a,b]$ quelconque.