FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES

Exercice 1 (Propriétés élémentaires).

a) Montrer que ϕ_X est bornée et uniformément continue.

b) Montrer que ϕ_X est de type positif : pour tout $n \geq 1$ et tout $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, la matrice complexe $\{\phi_X(t_j - t_k)\}_{1 \leq j,k \leq n}$ est hermitienne positive.

c) Soit $n \geq 1$. On suppose que $\mathbb{E}[|X|^n] < \infty$. Montrer que $\phi_X \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$, et calculer $\phi_X^{(n)}$.

d) Donner le développement de Taylor de ϕ_X d'ordre 2 en zero lorsque $\mathbb{E}[X^2] < \infty, \mathbb{E}[X] = 0$.

e) Plus généralement, montrer que si $\mathbb{E}[e^{a|X|}] < \infty$ pour un certain $a > 0$, alors ϕ_X est analytique dans $[-a, a]$ et que

$$\phi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n t^n}{n!} \mathbf{E}[X^n].$$

Exercice 2 (Lois usuelles). Calculer la fonction caractéristique de chacune des lois suivantes.

a) $X \sim \mathcal{U}(\{-1, +1\})$.

b) $X \sim \mathcal{B}(p)$.

c) $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$.

d) $X \sim \mathcal{G}(p)$

e) $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

f) $X \sim \mathcal{U}(-a, a)$.

g) $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

h) $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

i) $X \sim \Gamma(r, \lambda)$.

Exercice 3 Calculer la fonction caractéristique du carré d'une gaussienne centrée réduite.

Exercice 4 (Formule d'inversion de Fourier). On se propose de montrer que si $\phi_X \in L^1(\mathbb{R})$, alors X admet une densité continue et bornée, donnée par la formule suivante :

$$f(x) \quad = \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \phi_X(t) \mathrm{d}t \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

a) Vérifier que f est bien continue et bornée.

b) Justifier que pour tous $\sigma > 0$ et $u \in \mathbb{R}$, on a

$$\exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) \quad = \quad \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(iut - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \mathrm{d}t.$$

c) En déduire que pour tous $\sigma > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{(X-y)^2}{2\sigma^2}\right)\right] \quad = \quad \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-iyt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \phi_X(t) \, \mathrm{d}t.$$

d) En déduire que pour toute fonction $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue à support compact, on a

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} h(y) \mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{(X-y)^2}{2\sigma^2}\right)\right] \mathrm{d}y \quad \xrightarrow[\sigma \to 0+]{} \quad \int_{\mathbb{R}} h(y) f(y) \, \mathrm{d}y.$$

e) Vérifier que le membre de gauche vaut $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[h(X + \sigma s)] e^{-\frac{s^2}{2}} \, \mathrm{d}s$ et conclure.

Exercice 5 (Cauchy). Soit λ un réel strictement positif.

a) Vérifier que $f\colon x \mapsto \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |x|}$ est une densité (dite densité de Laplace de paramètre λ), et calculer la fonction caractéristique associée.

b) En déduire la fonction caractéristique de la loi de Cauchy de paramètre λ.

c) Que peut-on dire de la somme de deux variables aléatoires de Cauchy indépendantes ?

Exercice 6 (Atomes). Soit X une variable aléatoire. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{-itx} \Phi_X(t) \, \mathrm{d}t \quad \xrightarrow[t \to \infty]{} \quad \mathbb{P}(X = x) \, .$$

Exercice 7 (Transformations). Montrer que si ϕ est une fonction caractéristique, alors $\overline{\phi}$, $\mathrm{Re}(\phi)$, $|\phi|^2$ et $e^{\phi - 1}$ en sont aussi.

Exercice 8 (Somme d'uniformes). Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme sur l'intervalle $(-1, 1)$. On pose $Z := X + Y$.

a) Montrer que Z admet une densité que l'on calculera.

b) Calculer par ailleurs ϕ_Z.

c) En déduire la fonction caractéristique de la loi de densité $t \mapsto c \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2$, ainsi que la valeur de la constante c.

Exercice 9 (Laplace). Soient W, X, Y, Z des variables aléatoire indépendantes, de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

a) Déterminer la fonction caractéristique de WX.

b) En déduire la loi de $WX + YZ$.

c) Montrer que $|WX + YZ|$ suit la loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice 10 (Une énigme). Soit Q une loi symétrique sur $\mathbb{R}$, avec la propriété suivante : pour tout $n \geq 1$, si $X_1, \ldots, X_n$ sont i.i.d. de loi Q, alors $\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ suit encore la loi Q. Trouver Q !

Exercice 11 (Une autre énigme). Dans cet exercice, X et Y désignent des variables aléatoires indépendantes et idendiquement distribuées de loi inconnue, de moyenne 0 et de variance 1. De plus, $X + Y$ est indépendante de $X - Y$. Quelle est la loi de X et Y ?

Exercice 12 (Encore une énigme). Dans cet exercice, X et Y désignent des variables aléatoires indépendantes et idendiquement distribuées de loi inconnue, de carré intégrable. De plus, $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ suit aussi la même loi que X et Y.

a) Quelle est l'espérance de X ?

b) Déterminer une équation fonctionnelle satisfaite par ϕ_X.

c) Résoudre cette équation à l'aide d'un développement de Taylor, et trouver la loi de X.

Exercice 13 Soit X_t une variable aléatoire de loi $\Gamma(1, t)$, c'est-à-dire de densité $x \mapsto \Gamma(t)^{-1} \mathbf{1}_{x \geqslant 0} e^{-x} x^{t-1}$.

a) Calculer la densité de $Y_t = (X_t - t)/\sqrt{t}$, ainsi que sa fonction caractéristique.

b) En déduire que

$$\frac{t^{t - \frac{1}{2}} e^{-t}}{\Gamma(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iu\sqrt{t}} \left(1 - \frac{iu}{\sqrt{t}}\right)^{-t} \mathrm{d}u.$$

c) Démontrer la formule de Stirling, à savoir l'équivalent suivant en $t \to \infty$:

$$\Gamma(t+1) \sim t^t e^{-t} \sqrt{2\pi t}.$$