VECTEURS ALÉATOIRES

Exercice 1 Quels sont les événements qui sont indépendants d'eux-mêmes ? Quelles sont les variables aléatoires qui sont indépendantes d'elles-mêmes ?

Exercice 2 (Convolutions). Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes. Déterminer la loi de $Z := X + Y$ dans chacun des cas particulier suivants :

1. $X \sim \mathcal{P}(\lambda), Y \sim \mathcal{P}(\mu)$.
2. $X \sim \mathcal{B}(n,p), Y \sim \mathcal{B}(m,p)$.
3. $X \sim \mathcal{U}(-1,1), Y \sim \mathcal{U}(-1,1)$.
4. $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2), Y \sim \mathcal{N}(\nu,\tau^2)$.
5. $X \sim \Gamma(r,\lambda), Y \sim \Gamma(s,\lambda)$.

Exercice 3 (Loi du chi-2). Soient $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un $n-$uplet de variables aléatoires gaussiennes standard indépendantes. Déterminer la loi de $|X|^2 := X_1^2 + \cdots + X_n^2$.

Exercice 4 Soit M une matrice de taille $n \times n$, dont toutes les entrées sont des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Calculer l'espérance et la variance de $\det(M)$.

Exercice 5 (Matrice de covariance). Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire tel que $\mathbb{E}[|X|^2] < \infty$. On appelle *matrice de covariance* de X la matrice $\Gamma = \mathbb{E}[XX^\top]$, c'est-à-dire

$$\Gamma_{ij} \quad := \quad \mathbb{E}\left[X_i X_j\right] - \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j].$$

1. Vérifier que Γ est une matrice symétrique positive. Est-elle définie positive ?
2. Que dire de Γ lorsque $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes ? Et la réciproque ?
3. On fixe une matrice (déterministe) $A = (A_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ et on pose $Y := AX$. Déterminer la matrice de covariance de Y, en fonction de celle de X.
4. Montrer que toute matrice symétrique positive est une matrice de covariance.

Exercice 6 (Énigme). Déterminer les lois $\mathcal{L}$ sur $\mathbb{R}_+$ ayant la propriété suivante : pour $n \ge 1$, si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et de loi $\mathcal{L}$, alors $n \min(X_1, \ldots, X_n)$ est de loi $\mathcal{L}$.

Exercice 7 (Partie entière/fractionnelle). On note $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ la partie entière de x et $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$ sa partie fractionnelle. Quelle est la loi de $(\lfloor X \rfloor, \{X\})$ si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$?

Exercice 8 (Coordonnées polaires).

1. Montrer que pour toute fonction mesurable $h\colon \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$, on a
$$\int_{\mathbb{R}^2} h(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad = \quad \int_{\theta=-\pi}^{\pi}\int_{r=0}^{\infty} h(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$
2. Retrouver en particulier l'identité
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \quad = \quad \sqrt{2\pi}.$$
3. Soient X et Y deux variables indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On note (R,Θ) l'écriture du point (X,Y) en coordonnées polaires. Trouver la loi de (R,Θ).

Exercice 9 (Problème de couple). Soit $\lambda,\mu > 0$ et (X,Y) un couple aléatoire de densité
$$f(x,y) \quad = \quad \frac{\lambda\mu}{y} e^{-\frac{\lambda x}{y}-\mu y}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)\mathbf{1}_{(0,\infty)}(y).$$

1. Déterminer la loi de Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Montrer que le couple $\left(\frac{X}{Y}, Y\right)$ admet une densité que l'on explicitera.
3. En déduire $\mathbb{E}[X^n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10 (Encore un problème de couple). Soient X et Y deux variables indépendantes de lois respectives $\Gamma(r,\lambda)$ et $\Gamma(s,\lambda)$, avec $r,s,\lambda > 0$. On pose $Z := X+Y$ et $U := X/Z$. Quelle est la loi du couple (Z,U) ? En déduire la *formule des compléments* :
$$\int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{s-1}\,\mathrm{d}x \quad = \quad \frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}.$$

Exercice 11 (Ratio). Quelle est la loi de X/Y si X,Y sont indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$?

Exercice 12 (Isotropie gaussienne).

1. Soient X,Y,Z des variables indépendantes $\mathcal{N}(0,1)$. Trouver la loi de (U,V,W) où
$$U := \frac{1}{3}\left(2X-2Y+Z\right), \qquad V := \frac{1}{3}\left(X+2Y+2Z\right); \qquad W := \frac{1}{3}\left(2X+Y-2Z\right).$$
2. Soient $X_1,\ldots,X_n$ des variables indépendantes, de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la matrice $A = (A_{ij})_{1\le ij\le n}$ pour que les vecteurs aléatoires $\underline{X} := (X_1,\ldots,X_n)$ et $\underline{Y} := A\underline{X}$ aient la même loi.