

SUITES ALÉATOIRES

**Exercice 1** (Convergences). Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables de Bernoulli indépendantes, de paramètres respectifs  $(p_n)_{n \geq 1}$ . Donner une condition nécessaire et suffisante pour que

1.  $X_n \rightarrow 0$  presque-sûrement lorsque  $n \rightarrow \infty$ ;
2.  $X_n \rightarrow 0$  en probabilité lorsque  $n \rightarrow \infty$ ;
3.  $X_n \rightarrow 0$  dans  $L^p$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , où  $p \geq 1$  est un nombre donné;
4.  $nX_n \rightarrow 0$  presque-sûrement lorsque  $n \rightarrow \infty$ ;
5.  $nX_n \rightarrow 0$  en probabilité lorsque  $n \rightarrow \infty$ ;
6.  $nX_n \rightarrow 0$  dans  $L^p$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , où  $p \geq 1$  est un nombre donné.

**Exercice 2** (Concentration). Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables dans  $L^2$ , d'espérances  $(\mu_n)_{n \geq 1}$  et de variances  $(\sigma_n^2)_{n \geq 1}$ . On suppose que  $\mu_n \neq 0$  et que  $\sigma_n/\mu_n \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Montrer que

$$\frac{X_n}{\mu_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 1.$$

**Exercice 3** (Collectionneur). Chaque œuf en chocolat contient une surprise choisie au hasard et uniformément parmi  $n$  surprises possibles, indépendamment des autres œufs. Un enfant décide de manger les œufs un à un, jusqu'à ce qu'il ait récolté un exemplaire de chacune des  $n$  surprises possibles. On cherche à estimer le nombre  $T_n$  d'œufs qu'il lui faudra manger.

1. Montrer que  $T_n$  est la somme de  $n$  variables géométriques indépendantes.
2. En déduire l'espérance et la variance de  $T_n$ .
3. Conclure que  $\frac{T_n}{n \ln n} \rightarrow 1$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , en un sens que l'on précisera.

**Exercice 4** (Records). Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables i.i.d. de fonction de répartition  $F$ , et

$$\alpha := \inf \{t \in \mathbb{R} : F(t) > 0\} \in [-\infty, +\infty) \quad \text{et} \quad \beta := \sup \{t \in \mathbb{R} : F(t) < 1\} \in (-\infty, +\infty].$$

Montrer que presque-sûrement,  $\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n = \alpha$  et  $\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = \beta$ .

**Exercice 5** (Maximum d'exponentielles). Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  i.i.d. de loi  $\mathcal{E}(1)$ . On cherche à établir que

$$Z_n := \frac{\max \{X_1, \dots, X_n\}}{\ln n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 1.$$

1. Vérifier que la convergence a lieu en probabilité lorsque  $n \rightarrow \infty$ .
2. Montrer que presque-sûrement,  $\liminf_{n \rightarrow \infty} Z_n \geq 1$ .

3. Montrer que presque-sûrement  $Z_{2^k} \rightarrow 1$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ , puis conclure.

**Exercice 6** (Maximum de gaussiennes). Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  i.i.d. de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . On veut montrer que

$$\frac{\max\{X_1, \dots, X_n\}}{\sqrt{2 \ln n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 1.$$

1. Montrer que pour tout  $x > 0$ ,  $\frac{f(x)}{x+x^{-1}} \leq \mathbb{P}(X_1 > x) \leq \frac{f(x)}{x}$ , où  $f(x)$  est la densité de  $\mathcal{N}(0, 1)$ .
2. Conclure à l'aide d'une approche similaire à celle de l'exercice précédent.

**Exercice 7** (Pas de loi des grands nombres sans moment). Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  des variables i.i.d.

1. Montrer que  $\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{|X_n| \geq n\})$  vaut 0 ou 1 selon que  $X_1$  est intégrable ou non.
2. Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite de nombre réels telle que la suite  $(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k)_{n \geq 1}$  soit convergente dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que nécessairement,  $\frac{u_n}{n} \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .
3. Dédire des deux questions précédentes que si  $X_1$  n'est pas intégrable, alors la probabilité pour que la suite  $(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k)_{n \geq 1}$  soit convergente dans  $\mathbb{R}$  est nulle.

**Exercice 8** (Processus de Poisson). Soient  $(X_n)_{n \geq 1}$  des variables indépendantes de loi  $\mathcal{E}(1)$ . On pose  $T_0 := 0$  et  $T_n := X_1 + \dots + X_n$  pour  $n \geq 1$ . Enfin, on fixe  $\lambda > 0$  et on pose

$$N := \max\{n \geq 0: T_n \leq \lambda\}.$$

1. Justifier que  $N < \infty$  presque-sûrement.
2. Montrer que pour  $n \geq 1$ , le vecteur  $(T_1, \dots, T_n)$  admet une densité que l'on déterminera.
3. Déterminer la loi de la variable aléatoire  $N$ .
4. Pour  $n \geq 1$ , déterminer la loi conditionnelle de  $(T_1, \dots, T_n)$  sachant  $\{N = n\}$ .

**Exercice 9** (Filtre à poissons). Soit  $p \in [0, 1], \lambda > 0$ . Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  des variables indépendantes de loi  $\mathcal{B}(p)$ , et soit  $N$  une variable aléatoire de loi  $\mathcal{P}(\lambda)$ , indépendante de  $(X_n)_{n \geq 1}$ . On pose

$$X := \sum_{k=1}^N X_k \quad \text{et} \quad Y := \sum_{k=1}^N (1 - X_k).$$

Montrer que les variables  $X$  et  $Y$  sont indépendantes et déterminer leurs lois.

**Exercice 10** (Récurrence/transience). Soit  $p \in [0, 1]$ , et  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables i.i.d. avec  $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p$  et  $\mathbb{P}(X_1 = -1) = 1 - p$ . On pose  $S_0 := 0$  et pour tout  $n \geq 1$ ,

$$S_n := X_1 + \dots + X_n.$$

On s'intéresse à  $Z := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{S_n=0\}}$ , le nombre de visites en zéro du processus  $(S_n)_{n \geq 0}$ .

1. Donner la loi de  $S_n$  pour  $n \geq 0$ , et trouver le comportement de  $\mathbb{P}(S_n = 0)$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .
2. En déduire que si  $p \neq \frac{1}{2}$ , alors  $\mathbb{P}(Z < \infty) = 1$ . Pourrait-on le prévoir sans faire de calcul ?
3. On pose  $A_n := \{S_n = 0\} \cap \bigcap_{k \geq n+1} \{S_k \neq 0\}$ . Montrer que

$$\mathbb{P}(Z < \infty) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(S_n = 0)\mathbb{P}(A_0).$$

4. En déduire que si  $p = \frac{1}{2}$ ,  $\mathbb{P}(Z < \infty) = 0$ .