# CONVERGENCE EN LOI

**Exercice 1** (Exemples). Déterminer la limite en loi de $(Z_n)_{n\geq 1}$ dans chacun des cas suivants.

1. $Z_n = \frac{X_n}{n}$, avec $X_n \sim \mathcal{U}(\{1,\dots,n\})$.
2. $Z_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$, avec $np_n \to \lambda \in (0,\infty)$.
3. $Z_n = \frac{X_n}{n}$, avec $X_n \sim \mathcal{G}(p_n)$ et $np_n \to \lambda \in (0,\infty)$.
4. $Z_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}$ avec $(X_n)_{n\geq 1}$ i.i.d. et $\mathbb{E}[X_1^2]=1$, $\mathbb{E}[X_1]=0$.
5. $Z_n = \frac{X_n - \mathbb{E}[X_n]}{\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_n)}}$, avec $X_n \sim \mathcal{P}(\lambda_n)$ et $\lambda_n \to +\infty$. En déduire au passage la valeur de
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}\right)e^{-n}.$$
6. $Z_n = \frac{X_n - \mathbb{E}[X_n]}{\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_n)}}$, avec $X_n \sim \Gamma(r_n, \lambda)$ et $r_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$.
7. $Z_n = n\min(X_1,\cdots,X_n)$, avec $(X_n)_{n\geq 1}$ i.i.d. $\mathcal{U}(0,1)$. Y a-t-il convergence p.s. ?
8. $Z_n = h(X_n)$, avec $h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue et $(X_n)_{n\geq 1}$ convergeant en loi vers $X$.

**Exercice 2** (Cas déterministe). Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle. À quelle condition y a-t-il convergence en loi pour la suite aléatoire $(X_n)_{n\geq 1}$ définie par $X_n = a_n$ ?

**Exercice 3** (Cas discret). Soient $X, X_1, X_2, \dots$ des v.a. dans $\mathbb{Z}$. Montrer que $X_n \to X$ en loi si et seulement si $\forall k \in \mathbb{Z}, \mathbb{P}(X_n = k) \to \mathbb{P}(X = k)$. Quelle est la limite de $\mathcal{B}(n,p_n)$ lorsque $np_n \to \lambda$ ?

**Exercice 4** (Cas à densité). Soient $X, X_1, X_2, \dots$ des v.a. de densités respectives $f, f_1, f_2, \dots$. Montrer que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.p.} f \implies X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} X$ et construire un contre-exemple pour la réciproque.

**Exercice 5** (Cas gaussien). On suppose que pour tout $n \geq 1$, $X_n \sim \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi si et seulement si $(\mu_n)_{n\geq 1}$ et $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ convergent, et trouver la loi limite.

**Exercice 6** (Distance de Levy). Si $\mu, \mu'$ sont des mesures de probabilités sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, de fonctions de répartitions notées $F, F'$, on définit
$$d(\mu,\mu') := \inf\{\delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, F(x-\delta)-\delta \leq F'(x) \leq F(x+\delta)+\delta\}.$$
Vérifier que $d$ est une distance, et qu'elle métrise la convergence étroite.

**Exercice 7** (Série aléatoire). Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{U}(\{-1,+1\})$. Montrer que la v.a. $Z := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}X_k$ est bien définie, et déterminer sa loi. *Indication* : établir l'identité
$$2^n \sin\left(2^{-n}t\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\left(2^{-k}t\right) = \sin(t) \qquad (n\in\mathbb{N}, t\geq 0).$$

**Exercice 8** (Méthode des moments). Soit $M > 0$ une constante.

1. Montrer que la loi d'une v.a. à valeurs dans $[-M, M]$ est déterminée par ses moments.

2. Pour des v.a. $X, X_1, X_2, \ldots$ à valeurs dans $[-M, M]$, établir l'équivalence suivante :
$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} X \quad \Longleftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{E}\left[X_n^k\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}\left[X^k\right].$$
3. Calculer $\int_0^\infty x^k f(x)dx$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, avec $f(x) = \frac{\sin(2\pi \ln x)}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x)^2}{2}}$. En déduire qu'il existe une infinité de lois distinctes sur $(0, \infty)$ qui ont les mêmes moments.

**Exercice 9** (Suite de Cauchy) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi de Cauchy $\mathcal{C}(1)$.

1. $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i$ converge-t-elle en loi ?
2. $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ converge-t-elle en loi ? en proba ?
3. Montrer que, pour $t > 0$, $()\pi(t+1))^{-1} \leq \mathbb{P}(X_1 > t) \leq (\pi t)^{-1}$.
4. On note $Z_n = \frac{\max_{i=1,\ldots,n} X_i}{n}$. Montrer que $Z_n$ converge en loi vers une variable $Z$ dont on donnera la densité.

**Exercice 10** (Queue lourde). Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. de densité
$$f(x) := \frac{1}{|x|^3} \mathbf{1}_{(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)}(x).$$

1. Vérifier que $f$ est bien une densité, puis calculer $\mathbb{E}[X_1]$ et $\mathbb{E}[X_1^2]$. Le TCL s'applique-t-il ?
2. On note $\phi$ la fonction caractéristique de $X_1$. Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\phi(t) = 1 - 2t^2 \int_t^\infty \frac{1-\cos(x)}{x^3}\, \mathrm{d}x.$$
3. En déduire que $\phi(t) = 1 - t^2 \ln \frac{1}{t} + o\left(t^2 \ln \frac{1}{t}\right)$ lorsque $t \to 0^+$.
4. Soit $Z_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n \ln n}}$. Conclure que $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge en loi et préciser la limite.
5. Soit $\theta \geq 0$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[e^{-\theta Z_n^2}\right]$ existe et la calculer.

**Exercice 11** (Lois stables). On dit que $X$ suit la loi stable de paramètres $\alpha \in [1, 2]$ et $\lambda \in (0, \infty)$ si
$$\Phi_X(t) \quad = \quad \exp\left(-\lambda |t|^\alpha\right) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

1. Quelles lois reconnaît-on dans les cas $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$ ?
2. Montrer que $X$ admet une densité donnée par
$$f_X(x) \quad = \quad \frac{\lambda\alpha}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{sinc}(xt) t^\alpha e^{-\lambda t^\alpha}\, \mathrm{d}t \qquad (x \in \mathbb{R}).$$
3. Pour quelles valeurs de $\alpha$ l'espérance $\mathbb{E}[X]$ existe-t-elle ? Quelle est alors sa valeur ?
4. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ des v.a.i.i.d. de même loi que $X$. Quelle est la loi de $Z_n := \frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}$ ?
5. Pour quelles valeurs de $\alpha$ la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle en loi ? Que peut-on en déduire ?

**Exercice 12** (Théorème de représentation de Skorokhod). On considère l'*espace probabilisé canonique* $\Omega = [0, 1]$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

1. Soit $\mu$ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de fonction de répartition $F$. On pose
$$X(\omega) := \inf\{t \in \mathbb{R} \colon F(t) \geq \omega\} \qquad (\omega \in \Omega).$$
Vérifier que $X$ est une variable aléatoire sur $\Omega$, et que sa loi est $\mu$.
2. Soit $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ des probabilités sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, et $X, X_1, X_2, \ldots$ les v.a. sur $\Omega$ obtenues par la construction ci-dessus. Montrer que $X_n \to X$ p.s. si et seulement si $\mu_n \Rightarrow \mu$.