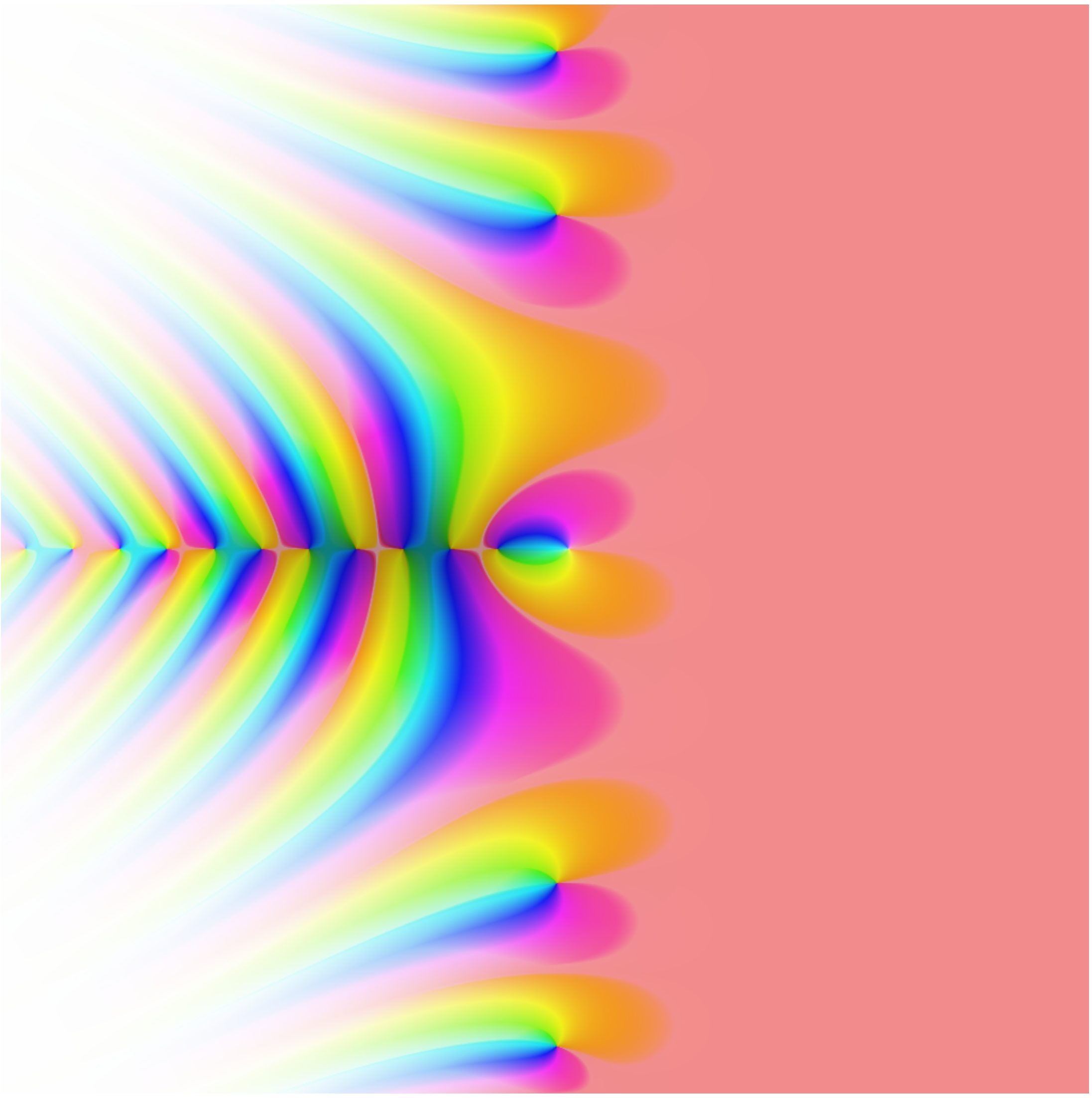
Analyse Complexe
2019

Ce document contient onze feuilles d'exercices pour le cours d'analyse complexe (3M266), ainsi que quatre interrogations corrigées. Tous les documents (notamment les notes de cours) se trouvent sur la page de Vincent Michel.



Une représentation de la fonction *zeta* de Riemann (Fredrik Johansson).

Il nous arrivera d'utiliser les notations suivantes :

$\mathfrak{Re}(z), \mathfrak{Im}(z)$	parties réelle et imaginaire du nombre complexe z
$\lvert z\rvert, \bar{z}$	module et conjugué du nombre complexe z
$\mathrm{D}(z, r)$	disque ouvert de centre z et de rayon r
$\mathbb{D}$	$\mathrm{D}(0,1)$
$\mathscr{C}(a, r)$	nombres complexes z tels que $\lvert z-a\rvert = r$
$\mathscr{C}(a, r)^+$	chemin qui paramétrise $\mathscr{C}(a, r)$ dans le sens positif
$\mathbb{T}$	$\mathscr{C}(0,1)$
$\mathbb{H}$	nombres complexes z tels que $\mathfrak{Im}(z) > 0$
$\mathcal{O}(\Omega)$	ensemble des fonctions holomorphes sur l'ouvert Ω
$\mathrm{A}(z; s, t)$	anneau de centre z et de rayons s, t
$\mathbb{C}^*$	ensemble des nombres complexes non nuls
$\mathrm{Rés}(f, z)$	résidu de la fonction f au point z
Log	détermination principale du logarithme
L^2	fonctions de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue
$\langle\gamma\rangle$	ensemble image du chemin γ
Δ	opérateur laplacien $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$

Thèmes des feuilles d'exercices

I

Introduction : le plan complexe

Exercice 1 • Réfléchir à l'énoncé suivant :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad e^{i\theta} = e^{2i\pi \frac{\theta}{2\pi}} = (e^{2i\pi})^{\frac{\theta}{2\pi}} = 1^{\frac{\theta}{2\pi}} = 1.$$

Exercice 2 • Cet exercice porte sur les propriétés élémentaires du logarithme complexe.

a. A-t-on $\mathrm{Log}(ab) = \mathrm{Log}(a) + \mathrm{Log}(b)$ pour tous $a, b \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ tels que $ab \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$?

b. A-t-on $b\mathrm{Log}(a) = \mathrm{Log}(a^b)$ pour tous $a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que $a^b \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$?

c. A-t-on $\mathrm{Log}(1/z) = -\mathrm{Log}(z)$ pour tout z dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$?

d. Étant donné un nombre réel α, on note D_α la demi-droite $\{re^{i(\pi-\alpha)} : r \geqslant 0\}$ et $\mathrm{L}_\alpha : z \mapsto \mathrm{Log}(e^{i\alpha}z) - i\alpha$. Montrer que c'est une détermination continue du logarithme sur $\mathbb{C}\backslash\mathrm{D}_\alpha$.

Exercice 3 • Soit $w = -1 + i$ et $z = 3e^{2i\pi/3}$. Calculer $\mathrm{Log}(w), \mathrm{Log}(z), \mathrm{Log}(wz), \mathrm{Log}(w/z)$.

Exercice 4 • Que vaut i^i ?

Exercice 5 • Soit $\varphi : z \mapsto z^{-1}$. Déterminer l'image par φ des ensembles suivants : $\mathbb{D}$, la droite réelle, la droite imaginaire, le cercle de centre i et de rayon 1.

Exercice 6 • Montrer que pour tout nombre complexe z, les égalités suivantes sont vérifiées :

$$|\sin(z)|^2 = \sin(\mathfrak{Re}(z))^2 + \sinh(\mathfrak{Im}(z))^2.$$

$$|\cos(z)|^2 = \cos(\mathfrak{Re}(z))^2 + \cosh(\mathfrak{Im}(z))^2.$$

Exercice 7 • Trouver l'ensemble des solutions de l'équation $\cos(z) = a$, où a est un nombre complexe fixé.

Exercice 8 • Décrire tous les zéros des six fonctions trigonométriques et hyperboliques.

Exercice 9 • Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Existe-t-il une fonction continue $g : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ telle que $g(z)^k = z$ pour tout nombre complexe z non nul[1] ?

Exercice 10 • Soit P un polynôme complexe de degré non nul n.

a. Soit $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-èmes de l'unité. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{\zeta \in \mathbb{U}_{n+1}} \zeta^k$.

b. Montrer que

$$|\mathrm{P}(0)| < \sup_{\zeta \in \mathbb{U}_{n+1}} |\mathrm{P}(\zeta)|.$$

Exercice 11 • Caractériser les polynômes complexes surjectifs.

Exercice 12 • Trouver tous les nombres complexes z tels que $3z^{10} - \sqrt{8}z^5 + 3 = 0$. Trouver tous les nombres complexes tels que $z^2 + \omega z + c = 0$ (où ω, c sont des nombres complexes).

Exercice 13 • On pose $\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$. Il s'agit simplement de la sphère euclidienne dans $\mathbb{R}^3$. On pose $n = (0, 0, 1)$ le « pôle Nord » de $\mathbb{S}$ et on note $\mathbb{S}^* = \mathbb{S}\backslash\{n\}$. On identifiera le plan $\mathcal{P} = \{(a, b, 0) : a, b \in \mathbb{R}\}$ au plan complexe $\mathbb{C}$.

---

1. *Indication :* $\theta \mapsto (g(e^{i\theta})e^{-\frac{i\theta}{k}})$.

a. Soit $z \in \mathcal{P}$. Montrer que l'unique droite passant par n et par z intersecte $\mathbb{S}^*$ en un unique point que l'on notera $q(z)$.

b. Montrer que q est en réalité une bijection de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{S}^*$, et trouver une formule explicite pour son inverse $p : \mathbb{S}^* \to \mathcal{P}$, que l'on appelle *projection stéréographique.*

Exercice 14 • Soient $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Im}(z) > 0\}$ et $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ l'application définie par

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i}.$$

a. Montrer que $f(\mathbb{H})$ est inclus dans $\mathbb{D} = \mathrm{D}(0, 1)$.

b. Montrer que f établit une bijection entre $\mathbb{H}$ et $\mathbb{D}$.

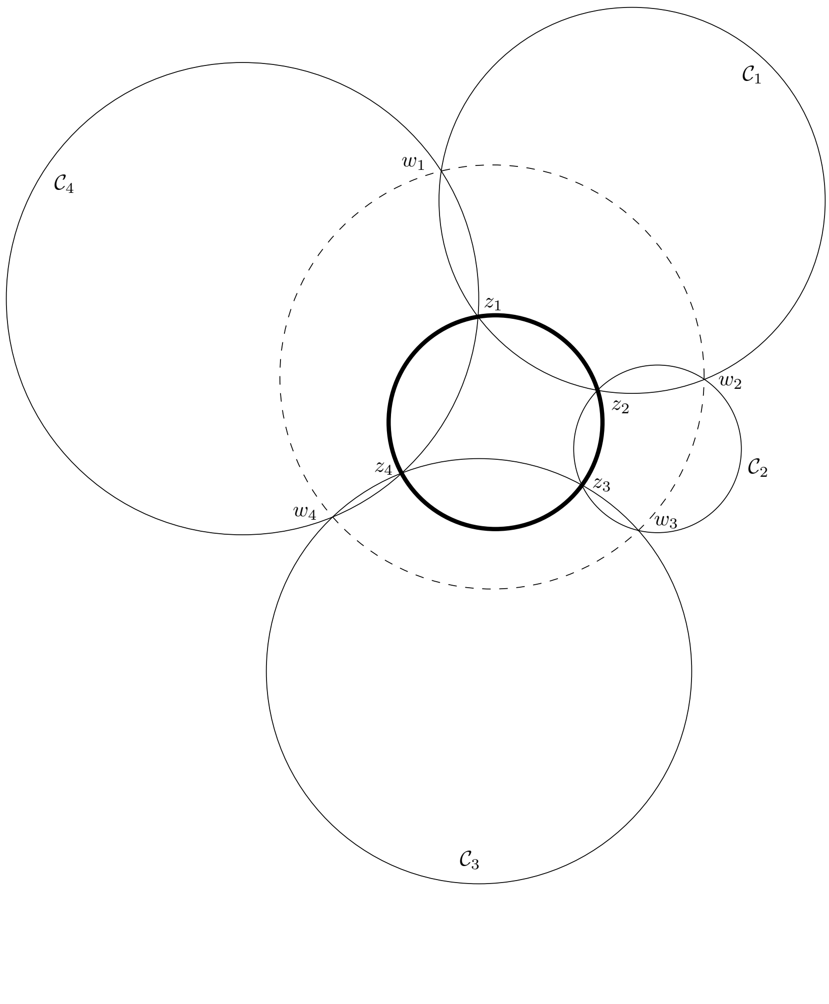
Exercice 15 • Soient z_1, z_2, z_3, z_4 quatre nombres complexes distincts. Leur *birapport* est le nombre complexe défini par

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}.$$

a. Rappeler pourquoi trois nombres complexes distincts a, b, c sont alignés si et seulement si $(a - b)/(a - c)$ est un nombre réel.

b. Montrer que quatre points distincts sont alignés ou cocycliques si et seulement si leur birapport est un nombre réel.

c. Soient $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_3, \mathscr{C}_4$ quatre cercles. Nous supposons que pour chaque paire de cercles consécutifs, ces deux cercles se coupent en exactement deux points z_i, w_i, comme dans la figure ci-dessous. Montrer que si les points z_1, z_2, z_3, z_4 sont cocycliques (cercle gras) ou alignés, alors il en va de même pour les points w_1, w_2, w_3 et w_4 (cercle pointillé). C'est le *théorème du sixième cercle de Miquel.*



II

$\mathbb{C}$-DÉRIVABILITÉ ET ÉQUATIONS DE CAUCHY-RIEMANN

Exercice 1 • Quelle est la dimension de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel ? En tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel ? En tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel ?

Exercice 2 • Dans cet exercice, on identifiera $\mathbb{C}$ à un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de base $\mathcal{B} = \{1, i\}$.

a. Montrer que l'ensemble des éléments de $\mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ de la forme

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

forme un corps, que l'on nommera $\mathrm{Mat}(\mathbb{C})$, isomorphe à $\mathbb{C}$.

b. Soit $\ell : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application $\mathbb{R}$-linéaire. Montrer qu'elle est $\mathbb{C}$-linéaire si et seulement si sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est un élément de $\mathrm{Mat}(\mathbb{C})$.

c. Soient a, b des réels et soit $z = a + ib$. On note $z = re^{i\theta}$ la décomposition polaire de z. Montrer que

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

d. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application $\mathbb{R}$-différentiable ; on note $\mathrm{P} = \mathfrak{Re}(f)$ et $\mathrm{Q} = \mathfrak{Im}(f)$. On note $\mathrm{D}f(z)$ sa matrice jacobienne dans la base $\mathcal{B}$ au point $z = x + iy$. Montrer que f est $\mathbb{C}$-différentiable en un point $z = x + iy$ si et seulement si

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}(z) = \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y}(z) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}(z) = -\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}(z). \tag{II.1}$$

Exercice 3 • Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uen fonction $\mathbb{R}$-différentiable. On note

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

a. Montrer que les opérateurs $\partial/\partial\bar{z}$ et $\partial/\partial z$ sont linéaires et vérifient la règle de la dérivation des produits.

b. Calculer $\partial f/\partial z$ et $\partial f/\partial \bar{z}$ lorsque $f(z) = z^n$ et lorsque $f(z) = \bar{z}^n$, pour n un entier positif.

c. Montrer que f est holomorphe si et seulement si $\partial f/\partial\bar{z} = 0$.

Exercice 4 • En quels points de $\mathbb{C}$ les fonctions suivantes sont-elles $\mathbb{C}$-différentiables ?

$$\frac{z}{z^2+1} \qquad \bar{z} \qquad \mathfrak{Re}(z) \qquad \mathfrak{Im}(z) \qquad |z|^2$$

Exercice 5 • Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(z) = \mathfrak{Re}(z) + i(\mathfrak{Im}(z))^2$. Montrer que f est $\mathbb{R}$-différentiable et calculer sa différentielle. Existe-t-il un ouvert non vide Ω de $\mathbb{C}$ tel que f est holomorphe sur Ω ?

Exercice 6 • Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

a. f est constante.

b. f' est identiquement nulle.

c. $\mathfrak{Re} f$ est constante.

d. $\mathfrak{Im} f$ est constante.
e. $\bar{f}$ est holomorphe.
f. $|f|$ est constante.

L'image d'une fonction holomorphe non constante peut-elle être contenue dans un cercle ? Dans une droite ?

Exercice 7 • Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω, et soit $\mathrm{F} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction réelle. On suppose que pour tout z dans Ω,

$$\mathfrak{Re} f(z) = \mathrm{F}(\mathfrak{Im} f(z)).$$

Montrer que f est constante.

Exercice 8 • Soient $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ deux fonctions holomorphes sur un ouvert connexe Ω.

a. On suppose que, pour tout z dans Ω, $f(z) + \overline{g(z)}$ est un nombre réel. Montrer qu'il existe une constante réelle c telle que $f = g + c$.
b. On suppose maintenant que g ne s'annule pas sur Ω et que, pour tout z dans Ω, $f(z)\overline{g(z)}$ est un nombre réel. Montrer qu'il existe une constante réelle c telle que $f = cg$.

Exercice 9 • Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω. On pose $\Omega' = \{\bar{z} : z \in \Omega\}$ et, pour z dans Ω', on définit $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$. Montrer que g est holomorphe sur Ω'.

Exercice 10 • Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω. L'opérateur laplacien est l'opérateur différentiel défini par

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Montrer que si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$, alors $\Delta f = 4\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z}$. En déduire que pour toute fonction f holomorphe (de classe $\mathscr{C}^2$), on a

$$\Delta |f|^2(z) = 4|f'(z)|^2.$$

Exercice 11 • Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, et $f_1, \dots, f_n$ des fonctions holomorphes sur Ω. Montrer que si $|f_1|^2 + \cdots + |f_n|^2$ est constante, alors toutes les fonctions f_i sont constantes.

Bernhard Riemann (1826 - 1866).

III

Fonctions analytiques

Rayon de convergence, développement en série entière.

Exercice 1 • Montrer que le rayon $\mathrm{R} \in [0, \infty]$ de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$ est donné par la formule suivante, dite *formule de Hadamard* :

$$\mathrm{R} = \frac{1}{\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}}.$$

Exercice 2 • Soit $(c_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels strictement positifs.

a. Montrer que $\limsup_{n\to+\infty} c_n^{1/n} \leqslant \limsup_{n\to+\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}$.

b. En déduire que si $\ell = \lim_{n\to+\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}$ existe dans $[0, +\infty]$, alors $\lim_{n\to+\infty} (c_n)^{\frac{1}{n}} = \ell$.

Exercice 3 • Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n z^n$ quand :

a. $a_n = \ln(n)$;

b. $a_n = \ln(1 + \sin(1/n))$;

c. $a_{2p} = \alpha^{2p}$ et $a_{2p+1} = \beta^{2p+1}$, $0 < \alpha < \beta$;

d. $a_n = \frac{n!}{n^n}$;

e. $a_{2p+1} = 0$ et $a_{2p} = \frac{(-1)^p p!}{(p+\sin p)^p}$;

f. $a_n = e^{n\sin(n)}$.

g. $a_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)^{\ln(n)}$

h. $\cos\left(\frac{2n\pi}{5} + \theta\right)^n$.

Exercice 4 • Montrer que si $a_n = \lambda_n b_n$ avec $\lambda_n = \mathrm{O}(n^\alpha)$ pour un nombre réel α, alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est supérieur à celui de $\sum b_n z^n$.

Exercice 5 • Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n^p z^n$, où p est un entier naturel ?

Exercice 6 • L'objectif de cet exercice est de présenter le classique procédé de sommation d'Abel et de l'appliquer à l'étude de la convergence de certaines séries.

a. (Transformation d'Abel) Soient $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites de nombres complexes. Pour deux entiers naturels n et m, avec n plus grand que m, on pose $\mathrm{V}_m^n = \sum_{k=m}^n v_k$. Montrer que

$$\sum_{i=m}^{n} u_i v_i = \sum_{i=m}^{n-1} (u_i - u_{i+1}) \mathrm{V}_m^i + u_n \mathrm{V}_m^n.$$

b. Soit $(c_n)_{n\geqslant 1}$ une suite décroissante de nombres réels positifs qui converge vers 0. Montrer que la série $\sum c_n z^n$ converge si $|z| \leqslant 1$ et $z \neq 1$.

c. (Théorème d'Abel) Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres complexes telle que $\sum a_n$ est convergente, de somme égale à S. Montrer que $\lim_{r\to 1^-} \sum a_n r^n = \mathrm{S}$.

Exercice 7 • Donner le développement en série entière des fonctions analytiques suivantes au point demandé et donner le rayon de convergence de la série obtenue :

— $f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z - 3}$ en 0 ;

— $g(z) = \frac{1}{3-2z}$ en 3 ;

— $h(z) = e^z$ en 1.

Exercice 8 • Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum z^{n!}$ est égal à 1. On note $f(z)$ la somme de cette série entière lorsque $z \in \mathbb{D}$. Montrer que si θ est un nombre rationnel, alors $\lim_{r\to 1^-} |f(re^{2i\pi\theta})| = +\infty$.

Exercice 9 • Si n est un entier naturel, on note $d(n)$ le nombre de diviseurs de n.

a. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum d(n)z^n$ est égal à 1. La somme de cette série dans $\mathbb{D}$ est notée $f(z)$; on l'appelle *série de Lambert*.

b. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a l'identité suivante :

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} z^{nm}$$

puis en déduire que $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}$.

Exercice 10 • Soit (a_n) une suite de nombres complexes qui possède une limite ℓ.

a. Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$.

b. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

Exercice 11 • Soit P un polynôme. Calculer le rayon de convergence et la somme de $\sum \mathrm{P}(n)z^n$.

Niels Henrik Abel (1802-1829).

IV

Fonctions analytiques

Propriétés des fonctions analytiques, fonctions spéciales.

Exercice 1 • Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction analytique. On pose $\mathbf{f}_r(\theta) = f(re^{i\theta})$.

a. Montrer que $\mathbf{f}_r$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et 2π-périodique.

b. Calculer ses coefficients de Fourier.

Exercice 2 • Déterminer les fonctions analytiques f sur $\mathbb{D}$ qui vérifient $f(1/n) = 1/n^2$ pour tout entier naturel non nul n.

Exercice 3 • Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et de somme $f(z)$. On se fixe un réel strictement positif $r < \mathrm{R}$.

a. Montrer que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$.

b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n|r^n \leqslant \max_{|z|=r} |f(z)|$. Montrer que s'il y a égalité pour un entier n, alors $f(z) = a_n z^n$ pour tout $|z| < \mathrm{R}$.

c. Montrer que si $|f|$ est maximal en 0, alors f est constante.

Exercice 4 • Soit f une fonction analytique sur $\mathbb{D}$.

a. On suppose qu'il existe une suite de réels distincts a_n dans $[-1/2, 1/2]$ tels que $f(a_n)$ soit réel pour tout entier n. Montrer que pour tout z dans $\mathbb{D}$, on a $\overline{f(\overline{z})} = f(z)$.

b. On suppose de plus que la suite (a_n) est décroissante, converge vers 0 et vérifie $f(a_{2p+1}) = f(a_{2p}) \in \mathbb{R}$ pour tout p. Montrer qu'alors f est constante[2].

Exercice 5 • Soit f une fonction entière.

a. On suppose que $f(z+1) = f(z+i) = f(z)$ pour tout nombre complexe z. Montrer que f est constante.

b. On suppose que la partie réelle de f est bornée. Montrer que f est constante.

c. On suppose qu'il existe une constante c et un entier positif p telle que $|f(z)| \leqslant c(1+|z|)^p$ pour tout nombre complexe z (on dit que f est à « croissance sous-polynomiale ») . Montrer que f est un polynôme de degré au plus p.

Exercice 6 • Soit f une fonction entière vérifiant la propriété suivante : pour tout nombre complexe z, il existe un entier n_z tel que $f^{(n_z)}(z) = 0$. Que dire de f ?

Exercice 7 • Montrer que l'expression $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(z-1)^n$ définit une fonction f vérifiant l'équation $e^{f(z)} = z$ sur le disque $\mathrm{D}(1,1)$.

Exercice 8 • Calculer $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$

Exercice 9 • Pour tout nombre entier n, on pose

$$\mathrm{J}_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}.$$

a. Calculer le rayon de convergence de J_n.

2. *Indice : raisonner sur la dérivée.*

b. Montrer que J_n est solution de l'équation de Bessel :

$$f'' + \frac{1}{z} f' + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) f = 0.$$

Exercice 10 • L'objectif de l'exercice est d'étudier les fonctions tan et arctan complexes.

a. Montrer que la fonction $\tan = \sin / \cos$ est bien définie et analytique sur $\mathbb{C} \backslash A$, où $A = \pi/2 + \pi\mathbb{Z}$.

b. Soient $B = \{it : t \in \mathbb{R}, |t| \geqslant 1\}$ et $U = \mathbb{C} \backslash B$. Montrer que la formule

$$\varphi(z) = \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

définit un biholomorphisme[3] φ entre U et $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_-$. Calculer sa réciproque.

c. Montrer que la fonction $f : U \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \frac{1}{2i} \mathrm{Log} \left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)$$

vérifie $\tan \circ f = \mathrm{Id}_U$. En déduire que f est une extension analytique de la fonction arctangente usuellement définie sur $\mathbb{R}$.

d. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1}.$$

Exercice 11 • Calculer $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$

Exercice 12 • Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

a. Montrer que la fonction $\varphi(z) = \mathbf{E}[z^X]$ est analytique dans $\mathbb{D}$.

b. Calculer φ lorsque X a pour loi $\mathsf{Poisson}(c)$, $\mathsf{Binomiale}(n, p)$ ou $\mathsf{Uniforme}(\{1, \ldots, n\})$.

c. Calculer les dérivées de la fonction φ.

d. Calculer la limite de $\varphi(t)$ et de $\varphi'(t)$ lorsque $t \to 1$.

Leonhard Euler (1707-1783).

3. Rappel : un biholomorphisme entre deux ouverts est une application holomorphe, bijective entre ces deux ouverts, et dont l'inverse est holomorphe.

V

Fonctions analytiques

Prolongement, logarithmes, chemins.

Exercice 1 • Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on pose

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1}.$$

a. Montrer que f se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de 0. On écrit son développement de Taylor en 0 sous la forme

$$f(z) = \sum_{n=0} \frac{\mathrm{B}_n}{n!} z^n.$$

Les nombres B_n sont appelés *nombres de Bernoulli.*

b. Calculer $\mathrm{B}_0, \mathrm{B}_1$ puis montrer que pour tout $n > 1$ on a $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \mathrm{B}_k = 0$. En déduire que les B_n sont rationnels.

c. Montrer que $\frac{1}{e^z-1} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\text{cotan}(iz/2)$, où cotan := cos/sin et $z \notin \{2ki\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. En déduire que pour tout $n > 0$, $\mathrm{B}_{2n+1} = 0$.

Exercice 2 • On pose $\mathrm{U} = \{z \in \mathbb{C} : e^{\mathfrak{Re}(z)} < \mathfrak{Im}(z) < 2\pi + e^{\mathfrak{Re}(z)}\}$ et $\mathrm{V} = \mathbb{C} \backslash \mathscr{S}$, où $\mathscr{S}$ est la spirale définie par $\mathscr{S} = \{te^{it} : t \geqslant 0\}$. Vérifier que U, V sont ouverts, puis montrer que exp est une bijection de U dans V. En déduire qu'il existe une détermination continue du logarithme sur V.

Exercice 3 • L'objectif de cet exercice est de redémontrer des résultats classiques du cours sur les logarithmes.

a. Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et soit c un logarithme de a. Vérifier que la fonction

$$\mathrm{L}_a : z \to c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{z-a}{a}\right)^n$$

est une détermination analytique du logarithme dans $\mathrm{D}(a, |a|)$.

b. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$.

(a) Montrer que si L_1 et L_2 sont deux déterminations continues du logarithme sur U, alors $\mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2 = 2ki\pi$ pour un entier k.

(b) Soit $\ell : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ une fonction continue qui vérifie $\exp\{\ell(z)\} = z$ pour tout z dans U. Montrer que ℓ est analytique dans U.

(c) Montrer que $\ell'(z) = 1/z$.

Exercice 4 • Soit Log la détermination principale du logarithme.

a. Montrer qu'il existe une fonction g analytique sur le disque $\mathrm{D}(0,1)$ telle que

$$\forall\, z \in \mathrm{D}(0,1), \quad \mathrm{Log}(1+z) = z + z^2 g(z).$$

b. En déduire que la suite de fonctions (f_n) définies par

$$f_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers la fonction exp.

Les exercices suivants portent sur l'intégrale de chemin. Lorsque z est un nombre complexe, la notation $\mathscr{C}(z,r)^+$ désigne le lacet qui décrit le cercle de centre z et de rayon r, paramétré dans le sens direct, c'est-à-dire $\theta \in [0,1] \to z + r\exp(2i\pi\theta)$.

Exercice 5 • Soit γ le chemin $t \mapsto e^{it}$, où t décrit $[0,\pi/2]$. Calculer $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}$.

Exercice 6 • Calculer l'intégrale de chemin

$$\int_{\mathscr{C}(0,1)^+} \frac{1}{z^n}\mathrm{d}z$$

où n est un entier relatif. En déduire qu'il n'existe aucune détermination analytique du logarithme sur un ouvert contenant $\mathbb{T}$.

Exercice 7 • Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ un chemin de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Montrer que

$$\text{longueur}(\gamma) = \sup_{\mathbf{t}} \sum_{i=1}^{\mathrm{N}_\mathbf{t}} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|.$$

où le supremum porte sur l'ensemble des subdivisions finies de $[0,1]$, c'est-à-dire les suites finies $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_{\mathrm{N}_\mathbf{t}})$ avec $\mathrm{N}_\mathbf{t}$ un entier positif et $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_{\mathrm{N}_\mathbf{t}} \leqslant 1$.

Exercice 8 • Existe-t-il des chemins $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, mais qui sont de longueur infinie ?

Exercice 9 • Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ un chemin de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux et soit f une fonction continue sur l'image de γ. On pose $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$. Montrer que

$$\overline{\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z} = \int_{\bar{\gamma}} f^*(z)\mathrm{d}z.$$

Montrer également que

$$\overline{\int_{\mathscr{C}(0,1)^+} f(z)\mathrm{d}z} = -\int_{\mathscr{C}(0,1)^+} \frac{f(z)}{z^2}\mathrm{d}z.$$

Exercice 10 • On considère une fonction continue $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$. Montrer que si f est $\mathbb{C}$−dérivable en 0, alors

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^2} \int_{\mathscr{C}(0,r)^+} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

VI
Indice et formule de Cauchy

Exercice 1 • Soient $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ deux lacets de classe $\mathscr{C}^1$. On pose $\gamma(t) = \gamma_1(t)\gamma_2(t)$. Montrer que

$$\text{Indice}(0,\gamma) = \text{Indice}(0,\gamma_1) + \text{Indice}(0,\gamma_2).$$

Exercice 2 • Soient a, b deux nombres réels positifs et soit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ le chemin défini par $\gamma(t) = a\cos(t) + ib\sin(t)$; il s'agit du paramétrage d'une ellipse.

a. Calculer l'indice de tout point de $\mathbb{C}\backslash\langle\gamma\rangle$ par rapport à γ.

b. En déduire l'identité suivante :

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos(t)^2 + b^2\sin(t)^2}\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{ab}.$$

Exercice 3 • On définit un chemin $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ par $\gamma(t) = e^{it}(\cos(t)^2 + 1)^2$. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_\gamma \cosh(1+z^2)e^{\sinh(z^2 - e^{-z})}\mathrm{d}z.$$

Exercice 4 • Montrer que la fonction $f : z \mapsto \frac{1}{z^2 - z}$ n'admet pas de primitive holomorphe sur l'ouvert $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$.

Exercice 5 • Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$.

a. Soit f une fonction continue dans Ω et holomorphe dans $\Omega\backslash\mathbb{R}$. Montrer que f est holomorphe dans Ω.

b. On suppose maintenant que Ω est symétrique par rapport à l'axe des réels et on note $\Omega_+ = \{z \in \Omega : \mathfrak{Im}(z) > 0\}$. Soit une fonction f continue dans $\Omega_+ \cup (\Omega \cap \mathbb{R})$, holomorphe dans Ω_+, réelle dans $\Omega \cap \mathbb{R}$. Montrer que f admet une unique extension holomorphe à Ω.

Ce dernier résultat est connu sous le nom de principe de réflection de Schwarz.

Exercice 6 • Calculer les intégrales :

$$\int_{\mathscr{C}(0,1)^+} \frac{e^z}{z}\mathrm{d}z \qquad \text{et} \qquad \int_{\mathscr{C}(0,2)^+} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1}.$$

Exercice 7 • On définit une fonction f sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ par

$$f(z) = \frac{\text{Log}(z)}{1-z} \text{ si } z \neq 1 \quad \text{et} \quad f(1) = -1.$$

a. Montrer que f est holomorphe.

b. Pour $\varepsilon \in]0,1[$, on note $\mathrm{D}_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| \leqslant 1,\ |z| \geqslant \varepsilon\}$. Soit γ_ϵ un paramétrage de $\partial\mathrm{D}_\epsilon$, dans le sens direct. Calculer $\int_{\gamma_\epsilon} f(z)\,\mathrm{d}z$.

c. En déduire la valeur de $\mathrm{I} = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

Exercice 8 • L'objectif de cet exercice est de calculer la valeur de l'intégrale

$$\mathrm{I}(\alpha) := \int_0^\infty \frac{e^{it}}{t^\alpha}\mathrm{d}t$$

lorsque α est un nombre complexe vérifiant $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]0,1[$.

a. Vérifier que la fonction $f : z \mapsto e^{iz} z^{-\alpha}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_-$.

b. On fixe $\varepsilon > 0$ et $\mathrm{R} > \varepsilon$, et on définit un lacet γ par concaténation de quatre chemins γ_i, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, où γ_1 est le segment $[\varepsilon, \mathrm{R}]$, γ_2 est l'arc de cercle joignant R à iR, γ_3 est le segment $[i\mathrm{R}, i\varepsilon]$ et γ_4 est l'arc de cercle joignant $i\varepsilon$ à ε. Montrer que $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$.

c. Montrer que, lorsque $\varepsilon \to 0$ et $\mathrm{R} \to +\infty$, on a

$$\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z \to \mathrm{I}_\alpha \qquad \text{et} \qquad \int_{\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z \to -e^{(1-\alpha)\frac{i\pi}{2}} \Gamma(1-\alpha).$$

d. Montrer que $\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z$ et $\int_{\gamma_4} f(z)\mathrm{d}z$ tendent vers 0 lorsque $\varepsilon \to 0$ et $\mathrm{R} \to \infty$, puis en déduire

$$\mathrm{I}(\alpha) = e^{(1-\alpha)\frac{i\pi}{2}} \Gamma(1-\alpha).$$

En déduire la valeur des célèbres intégrales de Fresnel,

$$\int_0^\infty \cos(t^2)\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_0^\infty \sin(t^2)\mathrm{d}t.$$

Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857).

VII

Suites, séries et intégrales de fonctions analytiques

Exercice 1 • Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ qui s'annule en 0.

a. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} f(z^n)$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$ vers une fonction holomorphe g.

b. Calculer le développement en série entière de g autour de 0, en fonction de celui de f.

Exercice 2 • Soit f une fonction continue à support compact sur $\mathbb{R}$. On s'intéresse à sa transformée de Fourier $\hat{f}$, définie pour $z \in \mathbb{C}$, par

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ixz} \mathrm{d}x.$$

a. Montrer que $\hat{f}$ est une fonction entière.

b. Que dire d'une fonction continue à support compact dont la transformée de Fourier est continue à support compact ?

c. Que dire de deux fonctions f, g continues à support compact telles que $f * g = 0$?

Exercice 3 • Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. On s'intéresse à l'espace de Hardy

$$\mathcal{H}(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{O}(\Omega) : \int_{\Omega} |f(x)|^2 \mathrm{d}x < +\infty \right\},$$

muni de la norme L^2 usuelle : $\|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

a. Soit K un compact dans Ω. Montrer qu'il existe une constante c_{K} telle que

$$\forall f \in \mathcal{H}(\Omega), \quad \sup_{\mathrm{K}} |f| \leqslant c_{\mathrm{K}} \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

b. Montrer que $(\mathcal{H}(\Omega), \|.\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)})$ est complet.

Exercice 4 • Dans cet exercice, on étudie la fonction Gamma d'Euler :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} \mathrm{d}t.$$

a. Montrer que Γ est bien définie et holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Re}(z) > 0\}$.

b. Montrer que si $\mathfrak{Re}(z) > 0$, on a $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. En déduire que Γ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Re}(z) > -1 \text{ et } z \neq= 0\}$.

c. En déduire par récurrence que Γ se prolonge en une fonction holomorphe sur l'ouvert $\mathbb{C}\backslash\{0, -1, -2, \dots\}$.

Exercice 5 • L'objectif de l'exercice est d'étudier la fonction zeta de Riemann :

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

a. Montrer que ζ est bien définie et holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Re}(z) > 1\}$.

b. Notons $\mathrm{E}(t)$ la partie entière d'un réel t. Montrer que l'intégrale à paramètre

$$\mathrm{G}(z) = \int_1^{+\infty} \frac{t-\mathrm{E}(t)}{t^{z+1}}\mathrm{d}t$$

définit une fonction holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Re}(z) > 0\}$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathfrak{Re}(z) > 0$, on pose $\mathrm{I}_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^z}$. Montrer que

$$\int_n^{n+1} \frac{t-\mathrm{E}(t)}{t^{z+1}}\mathrm{d}t = \mathrm{I}_n(z) - n\mathrm{I}_n(z+1).$$

d. Montrer que si $\mathfrak{Re}(z) > 1$, on a

$$\zeta(z) = \frac{1}{z-1} + 1 - z\mathrm{G}(z).$$

e. En déduire que ζ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C}\backslash\{1\} : \mathfrak{Re}(z) > 0\}$.

Exercice 6 • Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur Ω telle que $\overline{f(\Omega)}$ est un compact inclus dans Ω. On veut montrer que la suite des itérées de f converge vers une fonction constante.

a. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n := \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$ est bien définie et holomorphe sur Ω.

b. Montrer que $\mathrm{L} := \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \overline{f_n(\Omega)}$ est compact.

c. Montrer qu'il existe une sous-suite (f_{n_k}) de (f_n) qui converge uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction $g \in \mathcal{O}(\Omega)$.

d. Montrer qu'alors $g(\Omega) = \mathrm{L}$.

e. En déduire que $\mathrm{L} = \{a\}$ pour un certain $a \in \mathbb{C}$.

f. En déduire que la suite (f_n) converge uniformément sur tout compact vers la fonction constante égale à a.

VIII
Principe du maximum

Exercice 1 • Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{H}$, continue et bornée sur l'adhérence $\overline{\mathbb{H}}$ de $\mathbb{H}$. On note M le supremum de $|f|$ sur $\partial\mathbb{H}$. On veut montrer que f est encore bornée par M sur le demi-plan supérieur $\mathbb{H}$.

a. Montrer que si $f(z) \to 0$ lorsque $|z| \to \infty$, alors f est bornée par M sur $\mathbb{H}$.

b. Dans le cas général, étudier la fonction $g : z \mapsto \frac{f^n(z)}{i+z}$, où n est un entier naturel, et montrer que f est toujours bornée par M sur $\mathbb{H}$.

Exercice 2 • Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Le module de f peut-il admettre un minimum local ?

Exercice 3 • Soit f une fonction holomorphe non constante dans $\mathbb{D}$. On suppose que pour tout z dans $\mathbb{D}$, le nombre complexe $f(z)$ est encore dans $\mathbb{D}$. On suppose en outre que f s'annule à l'origine.

a. Montrer que la fonction $g : z \mapsto f(z)z^{-1}$ est holomorphe dans $\mathbb{D}$.

b. Soit $r \in]0, 1[$. Montrer que pour tout z dans $\mathrm{D}(0, r)$, on a $|g(z)| < r^{-1}$, puis en déduire que pour tout z dans $\mathbb{D}$, on a $|f(z)| \leqslant |z|$.

c. Montrer que s'il existe un nombre complexe z_0 non nul tel que $|f(z_0)| = |z_0|$, alors f est une rotation.

Ce résultat important est le *lemme de Schwarz*.

Exercice 4 • Une fonction $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ est dite *unitaire* si elle est holomorphe sur $\mathbb{D}$, continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, et si pour tout z de module 1, son image $f(z)$ est encore de module 1.

a. Soit f une fonction unitaire non constante. Démontrer que f ne s'annule qu'un nombre fini de fois, et que pour tout z dans $\mathbb{D}$, son image $f(z)$ est aussi dans $\mathbb{D}$.

b. Prouver que si a est dans $\mathbb{D}$, la fonction $\mathcal{E}_a : z \mapsto \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ est unitaire.

c. Prouver que les fonctions unitaires sont, à une constante multiplicative près, les produits finis de fonctions de type $\mathcal{E}_a$, où a est dans $\mathbb{D}$.

Exercice 5 • Questions autour du principe du maximum.

a. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$, non constante, continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ et qui est de module constant sur $\partial\mathbb{D}$. Montrer que f s'annule sur $\mathbb{D}$.

b. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$, continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ et dont la partie réelle est constante sur $\partial\mathbb{D}$. Montrer que f est constante.

c. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$, continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, réelle sur $\partial\mathbb{D}$. Montrer que f est constante.

d. Soient f et g deux fonctions continues sur $\overline{\mathbb{D}}$, holomorphes dans $\mathbb{D}$, qui ne s'annulent pas, et telles que $|f(z)| = |g(z)|$ sur $\partial\mathbb{D}$. Montrer que $f = \lambda g$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$ de module 1. Est-ce encore vrai si f et g peuvent s'annuler ?

Exercice 6 • Soit f une fonction holomorphe dans $\mathbb{D}$. On va montrer qu'il n'est pas possible que $\lim_{|z|\to 1^-} |f(z)| = +\infty$.

a. On suppose dans un premier temps que f ne s'annule pas. En raisonnant sur la fonction holomorphe $\tilde{f} := 1/f$, montrer que $1/f(0) = 0$ et aboutir à une contradiction.

b. On suppose maintenant que f s'annule dans $\mathbb{D}$.

(a) Montrer qu'il existe un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[z]$ et une fonction holomorphe g qui ne s'annule pas tels que pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a $f(z) = \mathrm{P}(z)g(z)$.

(b) Conclure.

Exercice 7 • Soit f une fonction entière qui s'annule en 0. Soit $r > 0$. On fixe un réel $m > \sup\{\mathfrak{Re}(f(z)) : z \in \mathrm{D}(0, 2r)\}$. On définit une fonction $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ par

$$g(u) = \frac{f(2ru)}{2m - f(2ru)}.$$

a. Montrer que g est bien définie et holomorphe sur $\mathbb{D}$.

b. En utilisant le lemme de Schwarz, montrer que $|g(u)| \leqslant |u|$.

c. Démontrer *l'inégalité de Borel-Carathéodory* : pour tout $z' \in \mathrm{D}(0, r)$,

$$|f(z')| \leqslant 2 \sup\{\mathfrak{Re}(f(z)) : z \in \mathrm{D}(0, 2r)\}.$$

Hermann Schwarz (1843 - 1921).

IX

Homotopies et biholomorphismes

Exercice 1 • Soient deux lacets γ_1, γ_2 dans $\mathbb{C}^*$, vérifiant l'hypothèse suivante :

$$\forall t \in [0,1], \quad |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| < |\gamma_1(t)| + |\gamma_2(t)|.$$

Montrer que ces deux lacets sont homotopes dans $\mathbb{C}^*$.

Exercice 2 • Montrer que tout lacet dans un ouvert U est homotope dans U à un lacet $\mathscr{C}^\infty$.

Exercice 3 • Pour tout $t \in [0,1]$, soit $\varepsilon_t > 0$ un réel strictement positif. L'ouvert défini par $\mathrm{D} = \cup_t \mathrm{D}(t, \varepsilon_t)$ est-il simplement connexe ?

Exercice 4 • L'objectif de cet exercice est de donner une preuve topologique du théorème de D'Alembert-Gauss. Supposons donc qu'il existe un polynôme complexe P de degré $n \geqslant 1$ et ne s'annulant pas. Quitte à diviser P par une constante, on suppose même que le coefficient dominant de P est 1.

a. Pour $r > 0$, on paramètre le cercle de centre r par $\gamma(t) = re^{it}$, avec $t \in [0, 2\pi]$. Montrer que le lacet $\mathrm{P} \circ \gamma$ est homotope au lacet constant égal à $\mathrm{P}(0)$ dans $\mathbb{C}^*$.

b. Montrer que, si r est assez grand, $\mathrm{P} \circ \gamma$ est homotope au lacet γ^n dans $\mathbb{C}^*$. *Indice : utiliser un exercice précédent.*

c. En déduire deux calculs contradictoires de l'indice de $\mathrm{P} \circ \gamma$ par rapport à 0.

Exercice 5 • L'objectif de l'exercice est de montrer que les lacets dans $\mathbb{C}^*$ sont caractérisés (à homotopie près) par leur indice par rapport à 0. Soit donc $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ un lacet.

a. Montrer que γ est homotope à $\sigma = \gamma/|\gamma|$ dans $\mathbb{C}^*$.

b. Montrer qu'il existe une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_\mathrm{N} = 1$ de $[0,1]$ telle que pour $0 \leqslant k \leqslant \mathrm{N} - 1$, on a $\sigma([t_k, t_{k+1}]) \subset \mathrm{D}(\sigma(t_k), 1)$.

c. Montrer que, pour $0 \leqslant k \leqslant \mathrm{N} - 1$, il existe des fonctions continues $\theta_k : [t_k, t_{k+1}] \to \mathbb{R}$ telles que
   — $\forall t \in [t_k, t_{k+1}], \quad \sigma(t) = e^{i\theta_k(t)}$,
   — $\theta_{k+1}(t_{k+1}) = \theta_k(t_{k+1})$.

d. En déduire qu'il existe un entier n et une fonction continue $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ tels que pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\sigma(t) = e^{i\theta(t)}$ et $\theta(1) = \theta(0) + 2n\pi$.

e. Soit $\gamma_n(t) = e^{2i\pi nt}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, un paramétrage du cercle parcouru n fois. Déduire de ce qui précède que γ est homotope à γ_n dans $\mathbb{C}^*$.

f. Montrer que deux lacets de $\mathbb{C}^*$ sont homotopes si et seulement si ils ont même indice par rapport à 0.

Exercice 6 • L'objectif de l'exercice est de déterminer tous les biholomorphismes du disque unité.

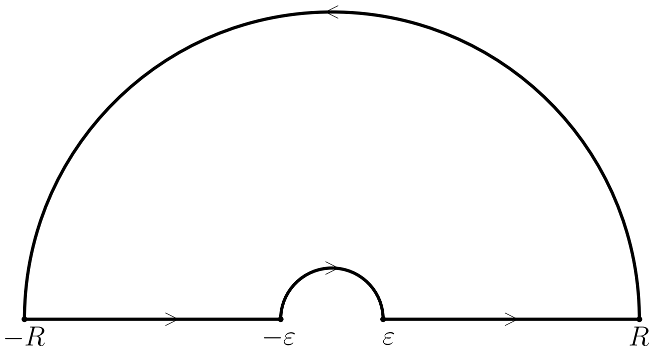
a. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathrm{D}(0,1)$ telle que $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leqslant 1$ pour tout $z \in \mathrm{D}(0,1)$.
   (a) Rappeler le résultat du lemme de Schwarz.
   (b) Montrer que $|f'(0)| \leqslant 1$, et que si $|f'(0)| = 1$, alors f est une rotation.

b. Montrer que les fonctions $\mathrm{E}_a : z \mapsto \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, où $a \in \mathrm{D}(0,1)$, sont des biholomorphismes de $\mathrm{D}(0,1)$, de réciproque E_{-a}. On appelle les fonctions E_a les *fonctions de Blaschke*.

c. En déduire que tout biholomorphisme du disque unité est de la forme $\rho \mathrm{E}_a$, où ρ est une constante de module 1 et $a \in \mathrm{D}(0,1)$.

Exercice 7 • En considérant le chemin $\gamma_{\varepsilon,\mathrm{R}}$ dessiné ci-dessous et la fonction $f : z \mapsto e^{iz}/z$, démontrer l'égalité suivante :

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$



Exercice 8 • Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un biholomorphisme tel que $f(0) = 0$.

a. Montrer que $g : z \mapsto f(1/z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$, avec un pôle en 0 (*on montrera que les autres types de singularités contredisent les hypothèses*).

b. En déduire qu'il existe une constante c et un entier naturel m tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leqslant c\,(1 + |z|)^m$. En déduire que f est un polynôme.

c. Quels sont les polynômes complexes bijectifs ?

d. En déduire que les biholomorphismes de $\mathbb{C}$ sont de la forme $z \mapsto \alpha z + \beta$, avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\beta \in \mathbb{C}$.

Exercice 9 • On dit qu'une fonction entière f est de type exponentiel s'il existe une constante C telle que pour tout z, on a $|f(z)| \leqslant e^{\mathrm{C}|z|}$. Soit f une fonction de type exponentiel qui ne s'annule pas et telle que $f(0) = 1$.

a. Montrer qu'il existe une fonction entière g telle que $f = \exp(g)$.

b. En utilisant l'inégalité de Borel-Carathéodory, en déduire que $f(z) = e^{az}$ pour un certain $a \in \mathbb{C}$.

Exercice 10 • Soit f une fonction entière telle que $f \circ f = \exp$.

a. Montrer qu'il existe une fonction entière g telle que $f = e^g$.

b. En déduire que f est injective et aboutir à une contradiction.

On vient de démontrer le *théorème de Thron* : il n'y a pas de fonction entière telle que $f \circ f = \exp$.

Exercice 11 • Le théorème de représentation conforme de Riemann dit que *pour tout ouvert* U *non vide simplement connexe de* $\mathbb{C}$ *et distinct de* $\mathbb{C}$*, il existe un biholomorphisme entre* U *et* $\mathbb{D}$.

a. Pourquoi le cas $\mathrm{U} = \mathbb{C}$ a-t-il été exclu ?

b. Trouver explicitement un biholomorphisme entre $\mathbb{D}$ et $\mathbb{H}$.

c. Trouver explicitement un biholomorphisme entre $\mathbb{H}$ et $\mathbb{NE} = \{z : \mathfrak{Re}(z) > 0, \mathfrak{Im}(z) > 0\}$.

d. Trouver explicitement un biholomorphisme entre $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D} \cap \mathbb{NE}$.

X

Singularités et résidus

Exercice 1 • Soit f une fonction entière. Pour tout z non nul, on pose $g(z) = f(1/z)$. Vérifier que g possède une singularité en zéro. Décrire le type de singularité de g en fonction de f.

Exercice 2 • Soient f, g deux fonctions entières telles que pour tout z, on a $|f(z)| \leqslant |g(z)|$. Montrer que f et g sont proportionnelles.

Exercice 3 • Montrer que $f : z \mapsto \frac{2z+1}{z^2+z-2}$ admet des développements en série de Laurent dans les anneaux $\mathrm{A}(0;0,1)$, $\mathrm{A}(0;1,2)$ et $\mathrm{A}(0;2,+\infty)$. Les calculer.

Exercice 4 • Pour chacune des fonctions suivantes, étudier les singularités et calculer les résidus.

$$\frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)} \qquad z^3 \sin\frac{1}{z^2} \qquad \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z} \qquad \frac{\sin(2z)}{z^4} \qquad \frac{1}{z}\exp\left(z+\frac{2}{z}\right)$$

Exercice 5 • a. Montrer que $\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^4} = 0$ (*on pourra déformer le cercle vers l'infini*).

b. Calculer de même $\int_{|z|=3} \frac{z^{17}}{(z^2+2)^3(z^3+3)^4}\mathrm{d}z$.

Exercice 6 • On pose $f_n(z) = \frac{1}{z^n(e^z-1)}$, où n est un entier naturel.

a. Étudier les singularités de f_n.

b. Calculer $\mathrm{I}_n = \int_{\mathscr{C}(0,1)^+} f_n(z)\mathrm{d}z$ pour $n = 0, 1, 2$.

Exercice 7 • Soit $a > 1$. En intégrant une fonction judicieusement choisie sur le cercle unité, montrer que

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\sin(t)}\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Exercice 8 • Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ et soit φ sa transformée de Fourier, définie par $\varphi(x) = \int f(t)e^{-ixt}\mathrm{d}t$. On pose $\mathbb{H} = \{\mathfrak{Im}(z) > 0\}$ et on suppose que f se prolonge en une fonction holomorphe dans un voisinage de $\overline{\mathbb{H}}\backslash\mathrm{S}$, où S est une partie finie de $\mathbb{H}$.

a. On suppose que $|f(z)| \to 0$ lorsque $|z| \to \infty$. Montrer que si $x < 0$,

$$\varphi(x) = 2i\pi \sum_{a\in\mathrm{S}} \mathrm{Rés}(f(z)e^{-ixz}, a).$$

b. En déduire que pour tout x,

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}e^{-|x|}.$$

Exercice 9 • Soit f une fraction rationnelle de degré inférieur ou égal à -2. Soit S l'ensemble de ses pôles. Montrer que $\sum_{s\in\mathrm{S}} \mathrm{Rés}(f, s) = 0$.

Exercice 10 • Pour tout $\alpha \in]0,1[$, on définit une fonction f_α par

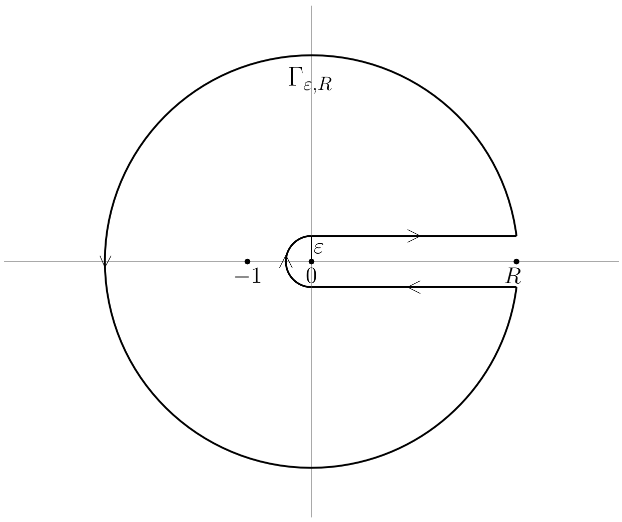
$$\forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+, z \neq -1, \qquad f_\alpha(z) = \frac{1}{z^\alpha(1+z)}$$

où l'on a choisi $z^\alpha = e^{\alpha\mathrm{L}(z)}$ avec $\mathrm{L} : \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} + i]0, 2\pi[$ la détermination *secondaire* du logarithme. On note $\Gamma_{\varepsilon,\mathrm{R}}$ le chemin dessiné ci-dessous.

a. Montrer que
$$\int_{\Gamma_{\varepsilon,\mathrm{R}}} f_\alpha(z)\mathrm{d}z = 2i\pi e^{-i\pi\alpha}.$$

b. On pose $\mathrm{I}_\alpha = \int_0^\infty \frac{1}{t^\alpha(1+t)}\mathrm{d}t$. Montrer que
$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \mathrm{R}\to\infty}} \int_{\Gamma_{\varepsilon,\mathrm{R}}} f_\alpha(z)\mathrm{d}z = (1-e^{-2i\pi\alpha})\mathrm{I}_\alpha$$
et en déduire
$$\int_0^\infty \frac{1}{t^\alpha(1+t)}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}.$$

c. Démontrer la *formule des compléments* : pour tout z qui n'est pas un entier,
$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$



Exercice 11 • Soit F une fraction rationnelle qui n'a pas de pôles réels, et de degré $d \leqslant -2$. On note $\mathcal{P}(f)$ l'ensemble de ses pôles.

a. Vérifier que $\int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{d}t < \infty$.

b. Soit $\mathrm{R} > 0$ et γ_{R} le bord du compact $\mathrm{K_M} = \overline{\mathrm{D}(0,\mathrm{R})} \cap \overline{\mathbb{H}}$. Montrer que
$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{\mathrm{R}}} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{w\in\mathcal{P}(f)\cap\mathrm{K_M}} \mathrm{Rés}(f,w).$$

c. En déduire que
$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{w\in\mathcal{P}(f)\cap\mathbb{H}} 2i\pi\mathrm{Rés}(f,w).$$

Exercice 12 • Soit ζ un nombre complexe non nul. On pose $f(z) = 1/(z^n-\alpha)$ et on note V l'ensemble des racines n-èmes de α.

a. Montrer que pour tout $\xi \in \mathrm{V}$, on a $\prod_{\zeta\neq\xi}(\xi-\zeta) = n\xi^{n-1}$.

b. Calculer $\mathrm{Rés}(f,\zeta)$ pour tout $\zeta\in\mathrm{V}$.

c. En utilisant l'exercice précédent, démontrer que si $n > 0$ est pair, on a
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^n+1}\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{n\sin(\pi/n)}.$$

XI
Exercices supplémentaires

Cette dernière feuille rassemble une vingtaine d'exercices portant sur l'ensemble du thèmes précédents, ainsi que quelques exercices utilisant les théorème de Montel et de Rouché, qui n'ont pas été vu en cours.

Exercice 1 • Une fonction réelle $u : \Omega \to \mathbb{R}$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ est dite *harmonique* si elle est de classe $\mathscr{C}^2$, et si elle vérifie $\Delta u = 0$, où

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Montrer que les fonctions harmoniques sont les parties réelles des fonctions holomorphes.

Exercice 2 • Montrer que $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(i+j)^\alpha} < +\infty$ si et seulement si $\alpha > 2$.

Exercice 3 • Soit $\mathrm{U} = \{z \in \mathbb{C} : |\mathfrak{Re}(z)| < 1\}$. Montrer qu'il existe exactement deux fonctions $f \in \mathcal{O}(\mathrm{U})$ telles que, pour tout $z \in \mathrm{U}$, $f(z)^2 = z^2 - 1$.

Exercice 4 • Soit f une fonction holomorphe sur $\mathrm{D}(0,1)$. On dit que f est *régulière* en un point $\zeta \in \partial\mathrm{D}(0,1)$ s'il existe une fonction holomorphe $\tilde{f}$ définie sur un voisinage de ζ et qui prolonge f. Si f n'est pas régulière en ζ, on dit qu'elle y est *singulière*.

Soit $\sum a_{k_n} z^{k_n}$ une série entière, où $n \mapsto k_n$ est une suite strictement croissante d'entiers. On dit que cette série est *lacunaire* s'il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout n, $k_{n+1} > (1+\delta)k_n$.

L'objectif de cet exercice est de démontrer le théorème suivant, appelé *théorème des lacunes de Hadamard : soit $\sum a_{k_n} z^{k_n}$ une série lacunaire de somme f ; alors, f est singulière en chaque point du bord de son disque de convergence.* Pour démontrer cela, on se donne une série lacunaire $\sum a_{k_n} z^{k_n}$ de somme f, de rayon de convergence 1. On suppose dans un premier temps que f est régulière en 1.

a. Soit $m > 1$ un entier. On pose $g_m(z) = f(z^m(1+z)/2)$. Montrer que g_m se prolonge en une fonction holomorphe dans un voisinage de $\overline{\mathrm{D}(0,1)}$. En déduire que le développement en série entière $\sum b_n z^n$ de g_m autour de 0 a un rayon de convergence $r > 1$.
b. Soit m un entier tel que $\delta^{-1} < m$. Montrer que pour tout n, on a $mk_{n+1} > (m+1)k_n$.
c. Calculer $b_{mk_n + \lfloor k_n/2 \rfloor}$.
d. En déduire que $\limsup |b_n|^{\frac{1}{n}} \geqslant \limsup |a_{k_n}|^{\frac{1}{k_n}}$, puis montrer que f ne peut pas être régulière en 1.
e. Montrer que pour tout $\zeta \in \partial\mathrm{D}(0,1)$, la fonction f est singulière en ζ.

Exercice 5 • Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On suppose que les a_n sont des réels positifs. Montrer qu'il n'existe aucun voisinage de 1 sur lequel on peut prolonger f en une fonction holomorphe sur ce voisinage (*théorème de Pringsheim*).

Exercice 6 • Soit f une fonction entière non constante.

a. Montrer que si l'image de f n'est pas dense dans $\mathbb{C}$, il existe un nombre complexe w et un réel $\delta > 0$ tel que $\mathrm{D}(w,\delta)$ ne rencontre pas l'image de f.
b. En déduire que l'image de f est dense dans $\mathbb{C}$.

Exercice 7 • Soit $f : \overline{\mathbb{H}} \to \mathbb{C}$ continue, holomorphe dans $\mathbb{H}$ et nulle sur $\partial\mathbb{H}$. Montrer que f est nulle.

Exercice 8 • Soit Ω un ouvert non borné et $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ une fonction continue, holomorphe dans Ω, et bornée sur $\partial\Omega$.

a. f est-elle toujours bornée ?

b. Montrer que si $|f(z)| \to 0$ lorsque $|z| \to \infty$, alors

$$\sup_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)| = \sup_{z\in\partial\Omega} |f(z)|.$$

c. On pose $\mathrm{U} = \{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Re}(z) > 0\}$. Soit $g : \overline{\mathrm{U}} \to \mathbb{C}$ une fonction continue, bornée sur $\partial\mathrm{U}$, telle qu'il existe $c > 0$ et $\alpha \in [0, 1[$ tels que

$$\forall z \in \mathrm{U}, \qquad |g(z)| \leqslant ce^{|z|^\alpha}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ et $\beta \in]\alpha, 1[$, on définit une fonction $g_\varepsilon : \overline{\mathrm{U}} \to \mathbb{C}$ par $g_\varepsilon(z) = g(z)\exp(-\varepsilon(1+z)^\beta)$.

(a) Montrer que g_ε est bien définie, puis que $|g_\varepsilon(z)| \to 0$ lorsque $|z| \to 0$.

(b) En déduire que g est bornée sur $\overline{\mathrm{U}}$ et que

$$\sup_{z\in\overline{\Omega}} |g(z)| = \sup_{z\in\partial\Omega} |g(z)|.$$

Ce dernier résultat est un cas particulier du *principe de Phragmén-Lindelöf.*

Exercice 9 • On pose $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathfrak{Re}(z) < 1\}$. Soit $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ continue, bornée sur $\overline{\Omega}$, et holomorphe dans Ω. Pour tout $x \in [0, 1]$, on pose $\mathrm{M}_x = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(x + it)|$. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$ on a

$$\mathrm{M}_x \leqslant \mathrm{M}_0^{1-x}\mathrm{M}_1^x.$$

C'est le *théorème des trois droites de Hadamard*[4].

Exercice 10 • Soient $r_1 < r_2$ et $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\}$. Soit $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ continue et holomorphe dans Ω. Pour tout $r \in [r_1, r_2]$, on pose $\mathrm{M}_r = \sup_{|z|=r} |f(z)|$. En utilisant le théorème des trois droites de Hadamard, montrer que pour tout $r \in [r_1, r_2]$, on a

$$\mathrm{M}_r \leqslant \mathrm{M}_{r_1}^\theta \mathrm{M}_{r_2}^{1-\theta}$$

où θ est l'unique réel de $[0, 1]$ tel que $\ln(r) = (1 - \theta)\ln(r_1) + \theta\ln(r_2)$. C'est le *théorème des trois cercles de Hadamard.*

Exercice 11 • Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}$ et $a \in \Omega$. On pose $f(z) = \frac{1}{z-a}$.

a. Montrer que f est holomorphe dans un voisinage de $\partial\Omega$.

b. (a) Soit p une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ et holomorphe dans Ω telle que

$$\sup_{z\in\partial\Omega} |f(z) - g(z)| < \varepsilon$$

pour un certain $\varepsilon > 0$. Montrer que pour tout $z \in \Omega$, on a $|(z - a)f(z) - 1| < d\varepsilon$ où $d = \sup_{\partial\Omega} |z - a|$.

(b) En déduire que f n'est pas limite uniforme sur $\partial\Omega$ de fonctions continues sur $\bar{\Omega}$ et holomorphes dans Ω.

c. Soit K un compact de $\mathbb{C}$ et f holomorphe dans un voisinage de K.

(a) Est-il toujours vrai que f est limite uniforme sur K de polynômes ?

(b) Et si K est un disque fermé ?

4. *Indice* : pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction $z \mapsto \exp(\varepsilon z^2)$ tend vers 0 lorsque $|z| \to \infty$. On pourra utiliser ce fait et un exercice précédent...

Exercice 12 • Soient f, g deux fonctions entières telles que $f\overline{g}$ est à valeurs réelles. Montrer que $f = \lambda g$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 13 • Soit Ω un ouvert connexe. Que dire d'une fonction holomorphe $f : \Omega \to \Omega$ telle que $f \circ f = f$?

Exercice 14 • Soit $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Im}(z) > 0\}$ et soit $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe bornée. On suppose que $\lim_{t\to\infty} f(it) = 0$. Soit (t_n) n'importe quelle suite de réels strictement positifs telle que $t_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$. Pour tout $z \in \mathbb{H}$, on pose $f_n(z) = f(t_n z)$.

a. Montrer que l'on peut extraire de (f_n) une sous-suite convergent uniformément vers les compacts.

b. Montrer que si une sous-suite de (f_n) converge uniformément sur les compacts vers une fonction g, on a $g = 0$.

c. En déduire que pour tout $z \in \mathbb{H}$, on a $\lim_{t\to\infty} f(tz) = 0$.

Exercice 15 • Soit $f_n : \mathrm{D}(0,1) \to \mathrm{D}(0,1)$ des fonctions holomorphes. On pose $\mathrm{U} = \{z \in \mathrm{D}(0,1) : \text{ la suite } (f_n(z)) \text{ converge}\}$. Montrer que si U a un point d'accumulation dans $\mathrm{D}(0,1)$, alors la suite (f_n) converge uniformément sur les compacts vers une fonction f.

Exercice 16 • Une partie H de $\mathbb{C}$ est dite *effaçable* si elle est compacte et qu'elle possède la propriété suivante : *toute fonction* $f : \mathbb{C}\backslash\mathrm{H} \to \mathbb{C}$ *holomorphe et bornée est constante.*

a. Les singletons sont-ils effaçables ?

b. Montrer qu'un ensemble possédant un intérieur non vide n'est pas effaçable.

c. Montrer que si H est effaçable, son complémentaire est connexe.

d. Montrer qu'une réunion finie d'ensembles effaçables est encore effaçable.

Exercice 17 • Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
- H est effaçable.
- Pour n'importe quel ouvert U contenant H, toute fonction holomorphe et bornée sur sur $\mathrm{U}\backslash\mathrm{H}$ s'étend en une unique fonction holomorphe sur U.

Exercice 18 • On va montrer dans cette question qu'une réunion dénombrable d'ensembles effaçables qui est compacte est effaçable. Soit (H_n) une suite d'ensembles effaçables. On pose $\mathrm{H} = \cup \mathrm{H}_n$ et on suppose que H est un compact.

a. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\mathrm{H}$ qui est bornée. Soit Ω le plus grand ouvert [5] sur lequel f s'étend en une fonction holomorphe. On suppose que $\Omega \neq \mathbb{C}$ et on pose $\mathrm{E} = \mathbb{C}\backslash\Omega$. Montrer qu'il existe un n tel que $\mathrm{H}_n \cap \mathrm{E}$ est d'intérieur non vide dans E.

b. En déduire l'existence d'un ouvert U de $\mathbb{C}$ tel que $\mathrm{U} \cap \mathrm{E} \subset \mathrm{U} \cap \mathrm{H}_n$.

c. Montrer que f s'étend en une fonction holomorphe bornée sur l'ouvert $\Omega \cup \mathrm{U}$, puis conclure.

Exercice 19 • Un ensemble *totalement déconnecté* si ses composantes connexes sont des singletons. Soit H un ensemble et soit $\mathrm{U} \subset \mathrm{H}$ une de ses composantes connexes.

a. Si U n'est pas réduite à un point, montrer qu'il existe une application conforme de $\mathbb{C}\backslash\mathrm{U}$ dans $\mathbb{D}$ (*indice : application conforme et sphère de Riemann*).

b. En déduire que H n'est pas effaçable.

On a montré que les ensembles effaçables sont totalement déconnectés.

---

5. Au sens de l'inclusion ; l'existence d'un tel ouvert est assurée par le lemme de Zorn.

On rappelle que la dimension de Hausdorff sur $\mathbb{C}$ se construit de la façon suivante. Soit A une partie de $\mathbb{C}$. Pour tout $s \geqslant 0$ et $\delta > 0$, on pose

$$\mathscr{H}_\delta^s(\mathrm{A}) = \inf_{\substack{\mathrm{A}\subset\bigcup_j \mathrm{A}_j \\ \mathrm{diam}(\mathrm{A}_j)\leqslant\delta}} \left\{ \sum_j \mathrm{diam}(\mathrm{A}_j)^s :, \mathrm{A}_j \subset \mathbb{C} \right\}.$$

La *mesure de Hausdorff de dimension s de* A est définie par

$$\mathscr{H}^s(\mathrm{A}) = \lim_{\delta>0} \mathscr{H}_\delta^s(\mathrm{A}).$$

Enfin, la dimension de Hausdorff de A, notée $\dim_{\mathscr{H}}(\mathrm{A})$, est l'unique nombre positif tel que $\mathscr{H}_s(\mathrm{A}) = \infty$ si $s < \dim_{\mathscr{H}}(\mathrm{A})$ et $\mathscr{H}_s(\mathrm{A}) = 0$ si $s > \dim_{\mathscr{H}}(\mathrm{A})$.

Exercice 20 • L'objectif de cet exercice est de démontrer le théorème de Painlevé, qui dit que les ensembles « très petits » au sens de la dimension de Hausdorff sont effaçables. Le théorème s'énonce comme suit :

Si $\dim_{\mathscr{H}}(\mathrm{H}) < 1$, alors H *est effaçable.*

a. Soit f une fonction holomorphe bornée au voisinage de l'infini [6]. Montrer que $f(z)$ possède une limite notée $f(\infty)$ lorsque $|z| \to \infty$, puis montrer que $z(f(z) - f(\infty))$ possède aussi une limite notée $f'(\infty)$ lorsque $|z| \to \infty$.
b. Soit H un ensemble compact tel que $\mathscr{H}^1(\mathrm{H}) = 0$ et soit f une fonction holomorphe bornée sur le complémentaire de H.
   (a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un recouvrement *fini* de H par des disques ouverts $\mathrm{D}_1, \ldots, \mathrm{D}_n$ de rayons $r_1, \ldots, r_n$ tels que $r_1 + \cdots + r_n < \varepsilon$.
   (b) On pose $\mathrm{U} = \mathrm{D}_1 \cup \ldots \cup \mathrm{D}_n$ et $\gamma = \partial\mathrm{U}$. Montrer que

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z \right| \leqslant \varepsilon \|f\|_\infty.$$

   (c) En déduire que $f'(\infty) = 0$.
   (d) Montrer que si f n'est pas constante, il existe un $a \in \mathbb{C}$ tel que $f(\infty) = f(a)$. Montrer alors que la fonction

$$g : z \to \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

   est bien définie sur $\mathbb{C}\backslash\mathrm{H}$, qu'elle est holomorphe, bornée, et qu'elle vérifie $g'(\infty) \neq 0$. Conclure.

Exercice 21 • Soit f une fonction holomorphe sur l'ouvert $\mathrm{D}(z_0, r)\backslash\{z_0\}$. On suppose que la partie réelle de f est positive en tout point. Montrer que f s'étend en une fonction holomorphe sur le disque $\mathrm{D}(z_0, r)$.

Exercice 22 • Soit f une fonction holomorphe injective sur un ouvert contenant le disque unité fermé de $\mathbb{C}$.

a. Calculer le déterminant jacobien de f (vue comme fonction $\mathbb{R}$-différentiable sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$) en fonction de f'.
b. Montrer que l'aire de $f(\mathrm{D}(0,1))$ est au moins $\pi|f'(0)|^2$ et caractériser l'égalité.

Exercice 23 • Soient a, b, c des nombres complexes. On suppose que $\mathfrak{Re}(c) > \mathfrak{Re}(b) > 0$ et que $\mathfrak{Re}(a) > 0$. Pour tout entier positif n, on pose $u_0 = 1$ et

$$u_n = \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1) \times b(b+1)\cdots(b+n-1)}{c(c+1)\cdots(c+n-1)}.$$

6. C'est-à-dire, holomorphe et bornée sur le complémentaire d'un compact.

a. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\mathrm{F}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n/n!$.

b. On pose

$$\mathrm{I}(z) = \int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tz)^a}\mathrm{d}t.$$

Montrer que I est une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}\backslash[1, +\infty[$.

Indice : considérer des ensembles ouverts de la forme $\mathbb{C}\backslash\mathrm{U}_\delta$ *où*

$$\mathrm{U}_\delta = \{z : |\mathrm{Arg}(z)| \leqslant \delta, |z| \geqslant 1\} \cup \overline{\mathrm{D}(1, 2\sin(\delta/2))}$$

c. On rappelle que $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$ pour tous nombres complexes x, y tels que $\mathfrak{Re}(x) > 0$ et $\mathfrak{Re}(y) > 0$. Calculer le développement en série entière de I autour de 0.

d. Démontrer l'identité suivante, valable pour tout $z \in \mathrm{D}(0,1)$:

$$\mathrm{F}(z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\mathrm{I}(z)$$

et montrer que F se prolonge de manière unique en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash[1, +\infty[$.

e. Démontrer la formule hypergéométrique de Gauss,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}.$$

(Indice : théorème d'Abel)

Exercice 24 • On rappelle que pour tout $\mathfrak{Re}(z) > 0$, on a $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t$.

a. Montrer que pour tout $\mathfrak{Re}(z) > 0$ et $t \in [0,1]$, on a

$$e^{-t}t^{z-1} = t^{z-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}t^{z+n-1}.$$

b. En déduire que pour tout $\mathfrak{Re}(z) > 0$,

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n} + \int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t.$$

c. Prouver que Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, dont les pôles sont tous les entiers négatifs ou nuls et sont simples. Montrer que $\mathrm{Rés}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}$.

Exercice 25 • L'objectif de cet exercice est de démontrer la formule suivante : pour tout z,

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}$$

où γ est la constant d'Euler-Mascheroni définie par $\gamma = -\ln(n) + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...$

a. On pose $\mathrm{I}_n(z) = \int_0^n t^{z-1}(1-t/n)^n\mathrm{d}t$. Montrer que pour tout $\mathfrak{Re}(z) > 0$, on a $\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{I}_n(z)$.

b. On pose $\mathrm{J}_n(z) = \int_0^1 u^{z-1}(1-u)^n\mathrm{d}u$. Montrer que $\mathrm{I}_n(z) = n^z\mathrm{J}_n(z)$.

c. Montrer que $\mathrm{J}_n(z) = (n/z)\mathrm{J}_{n-1}(z+1)$ pour tout $n \geqslant 1$; en déduire que

$$\mathrm{J}_n(z) = \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

d. Montrer que la suite de fonctions entières

$$f_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}$$

converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{C}$ vers une fonction entière qui ne s'annule jamais.

e. En déduire que la fonction Γ ne s'annule pas, que $\frac{1}{\Gamma}$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$, et qu'elle vérifie l'équation demandée.

Exercice 26 • L'objectif de cet exercice est d'utiliser le théorème de Rouché.

a. Soit n un entier positif non nul et soit $a > e$. Montrer que l'équation $e^z = az^n$ admet exactement n solutions dans $\mathrm{D}(0,1)$.

b. On pose $p(z) = z^5 - 6z + 4$. Combien de racines possède ce polynôme dans $\mathrm{D}(0,2)$?

c. On pose $q(z) = z^4 + 4z^2 + z + 1$. Combien de racines possède ce polynôme dans $\mathrm{D}(0,1)$?

d. Et pour $r(z) = z^4 + 3z^2 + z + 1$?

Réponses aux trois dernières questions : 5, 2 et 2.

Exercice 27 • On rappelle que la fonction ζ est la fonction holomorphe définie pour $\mathfrak{Re}(z) > 1$ par $\zeta(z) = 1 + 2^{-z} + 3^{-z} + \cdots$; l'objectif de l'exercice est de démontrer que ζ possède un (unique) prolongement holomorphe à $\mathbb{C}\backslash\{1\}$.

a. Vérifier que pour tout $s > 1$, on a

$$n^{-s}\Gamma(s) = \int_0^\infty u^{s-1} e^{-nu} \mathrm{d}u.$$

En déduire que pour $\mathfrak{Re}(z) > 1$,

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{e^x - 1} \mathrm{d}x.$$

b. Montrer que $\mathrm{F} : z \mapsto \int_1^\infty \frac{x^{z-1}}{e^x-1} \mathrm{d}x$ est une fonction entière.

c. On pose $f(z) = z(e^z - 1)^{-1}$: on rappelle[7] que f est une fonction holomorphe au voisinage de 0 et que pour tout $z \in \mathrm{D}(0, 2\pi)$, on a

$$f(z) = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{B}_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$$

où les B_n sont les nombres de Bernoulli. Par simplicité, on note a_n le n-ème coefficient du développement de f, c'est-à-dire $f = \sum a_n z^n$.

(a) Montrer que, pour $\mathfrak{Re}(z) > 1$, on a

$$\int_0^1 \frac{x^{z-1}}{e^x - 1} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z + n - 1}.$$

(b) En déduire que ζ s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{1\}$, avec un pôle simple en 1, de résidu 1.

7. Vu dans un exercice précédent.

Exercice 28 • L'objectif de cet exercice est de calculer la valeur de la fonction ζ sur les entiers naturels pairs ; ce calcul est dû à Euler. On pose $f(z) = z(e^z - 1)^{-1}$: on rappelle[8] que f est une fonction holomorphe au voisinage de 0 et que pour tout $z \in \mathrm{D}(0, 2\pi)$, on a

$$f(z) = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{B}_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$$

où les B_n sont les nombres de Bernoulli. On pose $b_n = \mathrm{B}_{2n}/(2n)!$.

a. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $b_n = \mathrm{Rés}\left(\frac{1}{z^{2n}(e^z-1)}; 0\right)$.

b. Soit ℓ un entier positif, et soit R_ℓ le carré de sommets $\pm(2\ell+1)\pi \pm i(2\ell+1)\pi$. Calculer

$$\mathrm{I}_\ell^{(n)} := \int_{\partial \mathrm{R}_\ell} \frac{1}{z^{2n}(e^z - 1)} \mathrm{d}z.$$

c. Montrer que pour tout $z \in \mathrm{D}(0, 2\pi)$,

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\zeta(2n)}{2^{2n-1}\pi^{2n}} z^{2n}$$

puis en déduire la valeur de la fonction ζ sur les entiers pairs :

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1}\mathrm{B}_{2n}(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}.$$

En particulier, $\zeta(2) = \pi^2/6$, $\zeta(4) = \pi^4/90$ et $\zeta(6) = \pi^6/945$.

Exercice 29 • L'objectif de l'exercice est de calculer l'intégrale suivante pour tout réel λ :

$$\mathrm{I}_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\lambda x)}{\cosh(x)} \mathrm{d}x.$$

par la méthode des résidus. On note I_λ l'intégrale à gauche, et on pose $f(z) = \frac{e^{i\lambda z}}{\cosh(z)}$.

a. Étudier les singularités de f.

b. Soit γ_R le chemin dessiné ci-dessous. On pose $\mathrm{J}_\mathrm{R} = \int_{\gamma_\mathrm{R}} f(z)\mathrm{d}z$. Montrer que

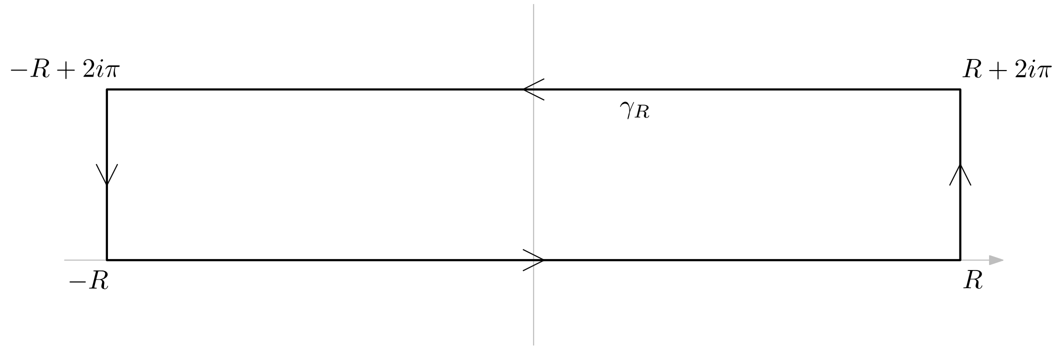
$$\mathrm{J}_\mathrm{R} = 4\pi e^{-\lambda\pi} \sinh(\lambda\pi/2).$$

c. On pose $\mathrm{I}'_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{\cosh(x)} \mathrm{d}x$. Montrer que

$$\lim_{\mathrm{R}\to\infty} \mathrm{J}_\mathrm{R} = (1 - e^{-2\lambda\pi})\mathrm{I}'_\lambda.$$

d. En déduire que

$$\mathrm{I}_\lambda = \frac{\pi}{\cosh\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)}.$$



8. Idem.

Identités remarquables démontrées en exercice

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\ln(2)\approx 0,6931 \tag{XI.1}$$

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots=\frac{\pi}{4}\approx 0,7854 \tag{XI.2}$$

$$\frac{9}{5}-\frac{27}{7}+\frac{81}{9}-\frac{243}{11}+\cdots=\frac{\pi}{\sqrt{27}} \tag{XI.3}$$

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}\approx 1,6449 \tag{XI.4}$$

$$\int_0^{\pi/2}\ln(\cos(t))\mathrm{d}t=-\frac{\pi\ln(2)}{2} \tag{XI.5}$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\xi t^2}\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{\pi}{\xi}} \tag{XI.6}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-it\xi}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=e^{-\frac{\xi^2}{2}} \tag{XI.7}$$

$$\int_0^{\infty} t^{\alpha}\cos(t^2)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}(1+\alpha)\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \tag{XI.8}$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos(t)}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t=\cos\left((1-\alpha)\frac{\pi}{2}\right)\Gamma(1-\alpha) \tag{XI.9}$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2} \tag{XI.10}$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)} \tag{XI.11}$$

$$\int_0^{\infty}\cos(t^2)\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\sin(t^2)\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{\pi}{8}} \tag{XI.12}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-it^2}\mathrm{d}t=\frac{1-i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{XI.13}$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(t)^{\alpha}\cos(\alpha t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2^{\alpha}} \tag{XI.14}$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{\gamma z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}} \tag{XI.15}$$

$$(n \text{ pair})\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t^n+1}\mathrm{d}t=\frac{2\pi}{n\sin(\pi/n)} \tag{XI.16}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\lambda x)}{\cosh(x)}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\cosh\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)} \tag{XI.17}$$

$$a\in]1,+\infty[\qquad \int_0^{2\pi}\frac{1}{a+\sin(t)}\mathrm{d}t=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}} \tag{XI.18}$$