RAPPELS (2)

Exercice 1 (Hoeffding) Soient X_i des variables aléatoires indépendantes uniformes sur $\{-1, 1\}$, et soient a_i des nombres réels.

1. Montrer que pour tout x, $\cosh(x) \leq e^{x^2/2}$.
2. Montrer que pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i > t\right) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2|a|^2}\right).$$

Exercice 2 . Soit $\{X_i\}_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes uniformes sur $\{-1, +1\}$. Donner un équivalent simple de $\mathbb{E}[|X_1 + \cdots + X_n|]$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 3 Soient M_n des variables aléatoires iid d'espérance 1 et de variance finie. Montrer que $X_n = M_0 M_1 \cdots M_n$ est une martingale par rapport à $\mathscr{F}_n = \sigma(M_i : i \leqslant n)$.

Exercice 4 Soit $(\mathscr{F}_n)$ une filtration et T un temps d'arrêt. Montrer qu'une variable aléatoire V est $\mathscr{F}_T$-mesurable si et seulement s'il existe un processus $(\mathscr{F}_n)$-adapté $X = (X_n)$ tel que $V = X_T$.

Exercice 5 (variation quadratique) Soit (X_n) une martingale L^2, avec $X_0 = 0$. On pose $Q_0 = 0$ et $Q_{n+1} - Q_n = (X_{n+1} - X_n)^2$.

1. Montrer que le processus M_n défini par

$$X_n^2 = M_n + Q_n$$

   est une martingale issue de 0.
2. Montrer que

$$\mathrm{Var}(Q_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i - X_{i-1}).$$

Exercice 6 (Classes monotones). Soient $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ deux mesures de probabilité sur un espace mesurable $(\Omega, \mathscr{A})$.

1. Vérifier que l'ensemble $\mathscr{M} = \left\{A \in \mathscr{A},\ \mathbb{P}(A) = \mathbb{Q}(A)\right\}$ est une classe monotone.
2. En déduire que si $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ coïncident sur un π-système engendrant $\mathscr{A}$, alors $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$.
3. Montrer que la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle caractérise sa loi.
4. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles intégrables sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, telles que

$$\forall A \in \mathscr{C}, \qquad \mathbb{E}[X\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[Y\mathbf{1}_A],$$

   où $\mathscr{C}$ est un $\pi-$système vérifiant $\Omega \in \mathscr{C}$ et $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{A}$. Que peut-on conclure ?

5. Soient $\mathscr{C}_1, \ldots, \mathscr{C}_n$ des $\pi-$systèmes inclus dans $\mathscr{A}$ et contenant l'élément Ω. On suppose que pour tout $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathscr{C}_1 \times \cdots \times \mathscr{C}_n$,
$$\mathbb{P}\left(A_1 \cap \cdots \cap A_n\right) = \mathbb{P}\left(A_1\right) \times \cdots \times \mathbb{P}\left(A_n\right).$$
Montrer que les tribus $\sigma(\mathscr{C}_1), \ldots, \sigma(\mathscr{C}_n)$ sont indépendantes.

Exercice 7 (Marche aléatoire). Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables indépendantes uniformes sur $\{-1, +1\}$ et soit $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$ sa filtration naturelle. On pose $S_0 := 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$S_n := X_1 + \cdots + X_n.$$

1. Vérifier que $(S_n)_{n\geq 0}$ est une martingale de carré intégrable et expliciter son crochet.
2. Pour $x \in \mathbb{Z}$, on note $T_x = \inf\{n \in \mathbb{N}\colon S_n = x\}$. Pour $a, b > 0$, calculer $\mathbb{E}[T_{-a} \wedge T_b]$ et $\mathbb{P}\left(T_{-a} < T_b\right)$. En déduire que presque-sûrement, la marche visite tous les sites.
3. Construire une martingale à partir de $e^{\lambda S_n}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 8 Dans cet exercice on identifie un nombre $x \in [0, 1]$ avec son développement en base 2. On appelle motif une suite finie de 0 et de 1 pour un motif m on note $N(m, x, k)$ le nombre de fois que le motif m apparaît dans les k premières décimales de x. On dit que x est un nombre parfait si pour tout motif
$$\lim_{k\to\infty} N(m, x, k)/k = 2^{-|m|},$$
où $|m|$ est la longueur de m. Montrer qu'il existe un nombre parfait.

Exercice 9 (Implication et contre exemple) Rappeler le tableau d'implication entre convergence L^p pour $p \geq 1$, convergence en probabilité, convergence en loi et convergence ps. Pour chaque implication fausse, donner un contre exemple.

Exercice 10 (Espérance conditionnelle) Soit X une variable aléatoire réelle intégrable et de densité f strictement positive sur $\mathbb{R}$. Déterminer $\mathbb{E}(X \mid |X|)$.

Exercice 11 (Hoeffding-Azuma)Soit (X_n) une martingale. On suppose qu'il existe un c tel que $\mathbb{P}$-presque sûrement, pour tout n, $|X_{n+1} - X_n| \leq c$. On pose $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$ et $\xi_n = X_n - X_{n-1}$.

1. Montrer que pour tout t,
$$\mathbb{E}[e^{tX_n}] = \mathbb{E}[e^{tX_{n-1}}\mathbb{E}[e^{t\xi_n}|\mathscr{F}_{n-1}]].$$
2. Montrer que $\mathbb{E}[e^{t\xi_n}|\mathscr{F}_{n-1}]] \leqslant e^{t^2}$.
3. En déduire que $\mathbb{E}[e^{tX_n}] \leqslant e^{nt^2}$ puis que
$$\mathbb{P}(X_n > t\sqrt{n}) \leqslant Ce^{-ct^2}$$
pour deux constantes C, c.