MOUVEMENT BROWNIEN

Exercice 1 (Quizz). Soit $B = \{B_t\}_{t\geq 0}$ un processus gaussien à trajectoires continues, tel que $B_t \sim \mathscr{N}(0,t)$ pour tout $t \geq 0$. Peut-on conclure que B est un mouvement brownien ?

Exercice 2 (Transformations). Soit $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un mouvement brownien et $a > 0$.

1. Montrer que $\{-B_t\}_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien.
2. Montrer que $\{B_{a+t} - B_a\}_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien indépendant de $\{B_t\}_{0\leq t\leq a}$.
3. Montrer que $\left\{\frac{B_{at}}{\sqrt{a}}\right\}_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien.
4. Montrer que $\left\{(1+t)B_{\frac{t}{1+t}} - tB_1\right\}_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien.
5. Montrer que $(t+1)B_{\frac{1}{1+t}} - B_1$ est un mouvement brownien.
6. Montrer que $\left\{tB_{\frac{1}{t}}1_{(t>0)}\right\}_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien.

Indication : On pourra dans un premier temps montrer qu'il suffit de contrôler la covariance entre deux temps (ou la variance d'un incrément) et la continuité.

Exercice 3 (Principe de réflexion). Soit $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un mouvement brownien, et soit $t > 0$. On pose

$$S_t := \sup_{0\leq s\leq t} B_s.$$

1. Soit $a \geq 0$ et $b \leq a$. À l'aide de la propriété de Markov forte, établir l'identité
$$\mathbb{P}\left(S_t \geq a, B_t \leq b\right) = \mathbb{P}\left(B_t \geq 2a - b\right).$$
2. En déduire que le couple (S_t, B_t) admet une densité que l'on explicitera.
3. Montrer que S_t a même loi que $|B_t|$.
4. Montrer que $T_a = \inf\{t \geq 0 \colon B_t = a\}$ a même loi que $(a/B_1)^2$, puis en déduire sa densité.

Exercice 4 (Intégrale d'un processus gaussien). Soit $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ un processus gaussien à trajectoires continues. Montrer que le processus $Y = \{Y_t\}_{t\geq 0}$ défini par

$$Y_t(\omega) := \int_0^t X_u(\omega)du$$

est encore un processus gaussien dont on précisera les fonctions de moyenne et de covariance, en fonction de celles de X. Qu'obtient-on dans le cas où X est un mouvement brownien ?

Exercice 5 (Brownien fractionnaire). Soit $\mathfrak{h} \in]0,1[$ et soit $B^{\mathfrak{h}} = \{B_t^{\mathfrak{h}}\}_{t\geq 0}$ un processus gaussien centré à trajectoires continues dont la fonction de covariance est donnée par

$$K(s,t) = \frac{t^{2\mathfrak{h}} + s^{2\mathfrak{h}} - |t-s|^{2\mathfrak{h}}}{2}.$$

On admettra l'existence d'un tel processus. L'indice $\mathfrak{h}$ est appelé *indice de Hurst*.

1. Montrer que $\{c^{-\mathfrak{h}}B_{ct}^{\mathfrak{h}}\}$ a la même loi que $B^{\mathfrak{h}}$.
2. Montrer que pour tout s, $\{B_{s+t}^{\mathfrak{h}} - B_s^{\mathfrak{h}}\}_{t\geq 0}$ a la même loi que $B^{\mathfrak{h}}$.

3. $B^\natural$ vérifie-t-il la propriété de Markov ?

Exercice 6 (Pont brownien). Un pont brownien est un processus gaussien $\{Z_t\}_{0\leq t\leq 1}$ centré, à trajectoires continues et de fonction de covariance $\Gamma(s,t) = s\wedge t - st$.

1. Vérifier que la loi d'un pont brownien est invariante par retournement du temps : si $\{Z_t\}_{0\leq t\leq 1}$ est un pont brownien, alors $\{Z_{1-t}\}_{0\leq t\leq 1}$ aussi.
2. Soit $\{Z_t\}_{0\leq t\leq 1}$ un pont brownien. Que dire du processus $\left\{(1+t)Z_{\frac{t}{1+t}}\right\}_{t\geq 0}$?
3. Soit $B = \{B_t\}_{t\geq 0}$ un mouvement brownien. Pour $0 \leq t \leq 1$ on pose $Z_t := B_t - tB_1$. Montrer que $Z = \{Z_t\}_{0\leq t\leq 1}$ est un pont brownien indépendant de B_1.
4. On note $\mathscr{C}$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que pour toute fonction continue bornée $G\colon \mathscr{C} \to \mathbb{R}$,
$$\mathbb{E}\left[G(B)\big||B_1| \leq \varepsilon\right] \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \mathbb{E}[G(Z)].$$

Exercice 7 (Mouvement brownien multi-dimensionnel). Un processus $\{B_t = (B_t^1,\dots,B_t^d)\}_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est appelé mouvement brownien $d-$dimensionnel si ses coordonnées $\{B_t^1\}_{t\geq 0},\dots,\{B_t^d\}_{t\geq 0}$ sont des mouvements browniens indépendants. Vérifier que si $\{B_t\}_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien $d-$dimensionnel alors $\{UB_t\}_{t\geq 0}$ aussi, pour toute matrice $U \in \mathscr{O}(d,\mathbb{R})$.

Exercice 8 (Loi du tout ou rien de Blumenthal). Soit $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un mouvement brownien et soit $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle. On pose
$$\mathscr{F}_{0+} := \bigcap_{t>0} \mathscr{F}_t.$$

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\mathscr{F}_{0+}$ est indépendante de la tribu $\mathscr{G}_\varepsilon := \sigma(B_t - B_\varepsilon, t\geq\varepsilon)$.
2. En déduire que $\mathscr{F}_{0+}$ est indépendante de $\sigma\left(\bigcup_{\varepsilon>0}\mathscr{G}_\varepsilon\right)$.
3. Conclure que $\mathscr{F}_{0+}$ est triviale : pour tout $A \in \mathscr{F}_{0+}$, on a $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.

Exercice 9 On pose $\tau = \inf\{t > 0 : \ B_t > 0\}$.

1. Montrer que $\tau = 0$ presque sûrement.
2. En déduire que $\inf\{t > 0 : \ B_t = 0\} = 0$ presque sûrement.
3. En déduire que presque sûrement, $\{t > 0 : \ B_t = 0\}$ n'est pas borné.

Exercice 10 (Propriétés trajectorielles).Soit $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un mouvement brownien. Montrer que presque sûrement,

1. pour tout $\varepsilon > 0$, $\sup_{0\leq t\leq\varepsilon} B_t > 0$ et $\inf_{0\leq t\leq\varepsilon} B_t < 0$;
2. $\sup_{t\geq 0} B_t = +\infty$ et $\inf_{t\geq 0} B_t = -\infty$;
3. pour tout $a \in \mathbb{R}$, $T_a := \inf\{t \geq 0\colon B_t = a\}$ est fini ;
4. la fonction $t \mapsto B_t$ n'est monotone sur aucun intervalle non-trivial.
5. la fonction $t \mapsto B_t$ n'est pas dérivable à droite en 0.

Exercice 11 ($\star$) Montrer que $\mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^1 B_s^2 \mathrm{d}s\right)\right] = \left(\prod_{\ell=1}^\infty \left(1 + \frac{4}{(2\ell-1)^2\pi^2}\right)\right)^{-1/2}$.
Indice : B est limite uniforme de fonctions connues.

Exercice 12 Montrer que $\int_0^1 \frac{B_s}{s}\mathrm{d}s$ est bien défini presque sûrement.

Exercice 13 (Non-dérivabilité). Le but de cet exercice est de montrer que presque-sûrement, le mouvement brownien n'est dérivable à droite en aucun point $t \geq 0$.

1. Peut-on se restreindre aux points $t \in [0,1)$? Et au point $t = 0$?
2. Soit $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ et $M \geq 0$. On suppose qu'il existe $t \in [0,1)$ tels que

$$\sup_{0<h\leq 1} \frac{|f(t+h) - f(t)|}{h} \leq M.$$

   Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe $1 \leq k \leq 2^n$ tel que pour tout $1 \leq i \leq 2^n - 1$,

$$\left| f\left(\frac{k+i}{2^n}\right) - f\left(\frac{k+i-1}{2^n}\right) \right| \leq \frac{(2i+1)M}{2^n}.$$

3. Majorer la probabilité d'un tel événement sous la loi du mouvement brownien, et conclure.

Exercice 14 ($\star\star$) Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien en dimension $d = 2$, c'est-à-dire un processus dont les coordonnées $B^{(1)}, B^{(2)}$ sont des mouvements browniens indépendants. On s'intéresse à l'aire de la courbe décrite par B, c'est-à-dire à la variable aléatoire

$$\mathscr{A} = \mathrm{Leb}(\{B_s : s \geq 0\})$$

où Leb est la mesure de Lebesgue en dimension 2. L'objectif est de montrer que $\mathscr{A} = 0$ presque sûrement [1]. Pour simplifier les notations, on introduit aussi les variables aléatoires

$$\mathscr{A}_j = \mathrm{Leb}(\{B_s : s \in [j, j+1[\}).$$

1. Montrer que $\{\mathscr{A}_0 > r\} \subset \{\exists s \in [0,1], |B_s|_\infty > \sqrt{r}\}$. En déduire que $\mathbb{P}(\mathscr{A}_0 > r) \leq 4e^{-r/8}$, puis que les $\mathscr{A}_j$ sont intégrables.
2. Montrer que $\{B_s : s \in [0,1]\} \cap \{B_s : s \in [2,3]\}$ est de mesure de Lebesgue nulle $\mathbb{P}$-presque sûrement.
3. On pose $\gamma = B_2 - B_1$. Montrer que γ est indépendante des deux processus $X = (B_s)_{s\in[0,1]}$ et de $Y = (B_{2+s} - \gamma)_{s\in[2,3]}$. Quelle est la loi de ces deux processus ?
4. On pose $\mathscr{R}(x) = \mathrm{Leb}(X[0,1] \cap (x + Y[0,1]))$.
   (a) Vérifier que la famille de variables aléatoires $(\mathscr{R}(x))_{x\in\mathbb{R}^2}$ est indépendante de γ.
   (b) Montrer que $\mathbb{E}[\mathscr{R}(\gamma)] = 0$.
   (c) En utilisant la loi de γ, montrer que $\mathbb{P}$-presque sûrement,

$$\mathrm{Leb}(\{x \in \mathbb{R}^2 : \mathscr{R}(x) > 0\}) = 0.$$

5. En déduire qu'on ne peut pas avoir simultanément $\mathscr{A}_0 = 0$ et $\mathscr{A}_2 = 0$, puis que $\mathscr{A} = 0$ $\mathbb{P}$-presque sûrement. Conclure.

Exercice 15 (« le mouvement brownien ne passe par aucun point », $\star\star$)

1. En utilisant le résultat de l'exercice précédent, montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}^2$,

$$\int_{x\in\mathbb{R}^2} \mathbb{P}(x - y \in B[0,1]) = 0.$$

2. En déduire que $\mathbb{P}(y \in x + B[0,1]) = 0$ pour presque tout x.
3. Montrer que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{E}_x[\mathbb{P}_{B(\varepsilon)}(y \in B[0, 1-\varepsilon])] = \mathbb{P}(y \in x + B[0,1]).$$

4. Conclure.

1. Un résultat dû à Paul Lévy, 1940.