

MOUVEMENT BROWNIEN

Exercice 1 (Quizz). Soit $B = \{B_t\}_{t \geq 0}$ un processus gaussien à trajectoires continues, tel que $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ pour tout $t \geq 0$. Peut-on conclure que B est un mouvement brownien ?

Exercice 2 (Transformations). Soit $\{B_t\}_{t \geq 0}$ un mouvement brownien et $a > 0$.

1. Montrer que $\{-B_t\}_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien.
2. Montrer que $\{B_{a+t} - B_a\}_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien indépendant de $\{B_t\}_{0 \leq t \leq a}$.
3. Montrer que $\left\{\frac{B_{at}}{\sqrt{a}}\right\}_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien.
4. Montrer que $\left\{(1+t)B_{\frac{t}{1+t}} - tB_1\right\}_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien.
5. Montrer que $(t+1)B_{\frac{1}{1+t}} - B_1$ est un mouvement brownien.
6. Montrer que $\left\{tB_{\frac{1}{t}}1_{(t>0)}\right\}_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien.

Indication : On pourra dans un premier temps montrer qu'il suffit de contrôler la covariance entre deux temps (ou la variance d'un incrément) et la continuité.

Exercice 3 (Principe de réflexion). Soit $\{B_t\}_{t \geq 0}$ un mouvement brownien, et soit $t > 0$. On pose

$$S_t := \sup_{0 \leq s \leq t} B_s.$$

1. Soit $a \geq 0$ et $b \leq a$. À l'aide de la propriété de Markov forte, établir l'identité

$$\mathbb{P}(S_t \geq a, B_t \leq b) = \mathbb{P}(B_t \geq 2a - b).$$

2. En déduire que le couple (S_t, B_t) admet une densité que l'on explicitera.
3. Montrer que S_t a même loi que $|B_t|$.
4. Montrer que $T_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$ a même loi que $(a/B_1)^2$, puis en déduire sa densité.

Exercice 4 (Intégrale d'un processus gaussien). Soit $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ un processus gaussien à trajectoires continues. Montrer que le processus $Y = \{Y_t\}_{t \geq 0}$ défini par

$$Y_t(\omega) := \int_0^t X_u(\omega) du$$

est encore un processus gaussien dont on précisera les fonctions de moyenne et de covariance, en fonction de celles de X . Qu'obtient-on dans le cas où X est un mouvement brownien ?

Exercice 5 (Brownien fractionnaire). Soit $h \in]0, 1[$ et soit $B^h = \{B_t^h\}_{t \geq 0}$ un processus gaussien centré à trajectoires continues dont la fonction de covariance est donnée par

$$K(s, t) = \frac{t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}}{2}.$$

On admettra l'existence d'un tel processus. L'indice h est appelé *indice de Hurst*.

1. Montrer que $\{c^{-h}B_{ct}^h\}$ a la même loi que B^h .
2. Montrer que pour tout s , $\{B_{s+t}^h - B_s^h\}_{t \geq 0}$ a la même loi que B^h .
3. B^h vérifie-t-il la propriété de Markov ?

Exercice 6 (Pont brownien). Un pont brownien est un processus gaussien $\{Z_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ centré, à trajectoires continues et de fonction de covariance $\Gamma(s, t) = s \wedge t - st$.

1. Vérifier que la loi d'un pont brownien est invariante par retournement du temps : si $\{Z_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ est un pont brownien, alors $\{Z_{1-t}\}_{0 \leq t \leq 1}$ aussi.
2. Soit $\{Z_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ un pont brownien. Que dire du processus $\left\{(1+t)Z_{\frac{t}{1+t}}\right\}_{t \geq 0}$?
3. Soit $B = \{B_t\}_{t \geq 0}$ un mouvement brownien. Pour $0 \leq t \leq 1$ on pose $Z_t := B_t - tB_1$. Montrer que $Z = \{Z_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ est un pont brownien indépendant de B_1 .
4. On note \mathcal{C} l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} , muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que pour toute fonction continue bornée $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[G(B) | |B_1| \leq \varepsilon] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}[G(Z)].$$

Exercice 7 (Mouvement brownien multi-dimensionnel). Un processus $\{B_t = (B_t^1, \dots, B_t^d)\}_{t \geq 0}$ à valeurs dans \mathbb{R}^d est appelé mouvement brownien d -dimensionnel si ses coordonnées $\{B_t^1\}_{t \geq 0}, \dots, \{B_t^d\}_{t \geq 0}$ sont des mouvements browniens indépendants. Vérifier que si $\{B_t\}_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien d -dimensionnel alors $\{UB_t\}_{t \geq 0}$ aussi, pour toute matrice $U \in \mathcal{O}(d, \mathbb{R})$.

Exercice 8 (Loi du tout ou rien de Blumenthal). Soit $\{B_t\}_{t \geq 0}$ un mouvement brownien et soit $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ sa filtration naturelle. On pose

$$\mathcal{F}_{0+} := \bigcap_{t > 0} \mathcal{F}_t.$$

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que \mathcal{F}_{0+} est indépendante de la tribu $\mathcal{G}_\varepsilon := \sigma(B_t - B_\varepsilon, t \geq \varepsilon)$.
2. En déduire que \mathcal{F}_{0+} est indépendante de $\sigma(\bigcup_{\varepsilon > 0} \mathcal{G}_\varepsilon)$.
3. Conclure que \mathcal{F}_{0+} est triviale : pour tout $A \in \mathcal{F}_{0+}$, on a $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.

Exercice 9 On pose $\tau = \inf\{t > 0 : B_t > 0\}$.

1. Montrer que $\tau = 0$ presque sûrement.
2. En déduire que $\inf\{t > 0 : B_t = 0\} = 0$ presque sûrement.
3. En déduire que presque sûrement, $\{t > 0 : B_t = 0\}$ n'est pas borné.

Exercice 10 (Propriétés trajectorielles). Soit $\{B_t\}_{t \geq 0}$ un mouvement brownien. Montrer que presque sûrement,

1. pour tout $\varepsilon > 0$, $\sup_{0 \leq t \leq \varepsilon} B_t > 0$ et $\inf_{0 \leq t \leq \varepsilon} B_t < 0$;
2. $\sup_{t \geq 0} B_t = +\infty$ et $\inf_{t \geq 0} B_t = -\infty$;
3. pour tout $a \in \mathbb{R}$, $T_a := \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$ est fini ;
4. la fonction $t \mapsto B_t$ n'est monotone sur aucun intervalle non-trivial.
5. la fonction $t \mapsto B_t$ n'est pas dérivable à droite en 0.

Exercice 11 (★) Montrer que $\mathbb{E} \left[\exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^1 B_s^2 ds \right) \right] = \left(\prod_{\ell=1}^{\infty} \left(1 + \frac{4}{(2\ell-1)^2 \pi^2} \right) \right)^{-1/2}$.
Indice : B est limite uniforme de fonctions connues.

Exercice 12 Montrer que $\int_0^1 \frac{B_s}{s} ds$ est bien défini presque sûrement.

Exercice 13 (Non-dérivabilité). Le but de cet exercice est de montrer que presque-sûrement, le mouvement brownien n'est dérivable à droite en aucun point $t \geq 0$.

1. Peut-on se restreindre aux points $t \in [0, 1)$? Et au point $t = 0$?
2. Soit $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ et $M \geq 0$. On suppose qu'il existe $t \in [0, 1)$ tels que

$$\sup_{0 < h \leq 1} \frac{|f(t+h) - f(t)|}{h} \leq M.$$

Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe $1 \leq k \leq 2^n$ tel que pour tout $1 \leq i \leq 2^n - 1$,

$$\left| f \left(\frac{k+i}{2^n} \right) - f \left(\frac{k+i-1}{2^n} \right) \right| \leq \frac{(2i+1)M}{2^n}.$$

3. Majorer la probabilité d'un tel événement sous la loi du mouvement brownien, et conclure.