INTÉGRALE DE WIENER

Exercice 1 (Propriétés générales). Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $t \geq 0$ on pose

$$M_t := \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}B_s.$$

1. Montrer que $(M_t)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien à accroissements indépendants.
2. Montrer que $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale.
3. Construire une martingale à partir de $(M_t^2)_{t\geq 0}$.
4. Soit $\theta \in \mathbb{C}$. Construire une martingale à partir de $(\mathrm{e}^{\theta M_t})_{t\geq 0}$.
5. Pour quels choix de f le processus $(M_t)_{t\geq 0}$ est-il un mouvement brownien ?
6. Soit $g \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ et $N_t := \int_0^t g(s)\,\mathrm{d}B_s$. À quelle condition $(M_t)_{t\geq 0}$ et $(N_t)_{t\geq 0}$ sont-ils indépendants ?
7. On suppose maintenant seulement que $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, esquisser pourquoi les résultats précédents sont toujours valables.

Exercice 2 Soit (φ_n) une base Hilbertienne de $L^2(0,1)$. Montrer que pour toute fonction $f \in L^2(0,1)$, on a $\mathbb{P}$-presque sûrement

$$\int f(t)\mathrm{d}B_t = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \varphi_n\rangle \int_0^1 \varphi_n(t)\mathrm{d}B_t.$$

Exercice 3 Pour quels nombres réels a, b le processus

$$X_t = \int_0^t \left(a + b\frac{u}{t}\right)\mathrm{d}B_u$$

est-il un mouvement brownien ?

Exercice 4 Que dire du processus $(X_t)_{t\geq 0}$ défini par la formule suivante ?

$$X_t := \int_0^{\sqrt{t}} \sqrt{2s}\,\mathrm{d}B_s.$$

Exercice 5 (Pont brownien). Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On considère le processus $(Z_t)_{0\leq t<1}$ défini par

$$Z_t := a(1-t) + bt + (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s}\,\mathrm{d}B_s \qquad (0 \leq t < 1).$$

1. Montrer que $(Z_t)_{0\leq t<1}$ est un processus gaussien dont on explicitera les paramètres.
2. Que dire de ce processus dans le cas $a = b = 0$?

3. Montrer que lorsque $t \to 1$, on a $Z_t \to b$ au sens de la convergence L^2.
4. Montrer que la convergence a en fait lieu presque-sûrement.

Exercice 6 (Processus d'Ornstein-Uhlenbeck).Soit V_0 une variable aléatoire réelle indépendante de $(B_t)_{t\geq 0}$, et $b, \sigma > 0$. On définit un processus $(V_t)_{t\geq 0}$ par

$$V_t := \mathrm{e}^{-bt}\left(V_0 + \sigma \int_0^t \mathrm{e}^{bs}\, \mathrm{d}B_s\right).$$

1. Montrer que V_t converge en loi lorsque $t \to \infty$, et déterminer la limite.
2. On suppose désormais que $V_0 \sim \mathscr{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{2b}\right)$. Montrer que $(V_t)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien stationnaire dont on précisera les paramètres.
3. Que dire du processus $(W_t)_{t\in\mathbb{R}}$ défini par $W_t := \frac{\sigma}{\sqrt{2b}}\,\mathrm{e}^{-bt}\,B_{\mathrm{e}^{2bt}}$?

Exercice 7 (Intégration par partie). Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
1. Établir que pour tout $t \geq 0$, on a presque-sûrement

$$\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}B_s + \int_0^t f'(s)B_s\,\mathrm{d}s = f(t)B_t.$$

2. Sous les hypothèses supplémentaires $f(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ et $\int_0^\infty |f'(t)|\sqrt{t}\ \mathrm{d}t < \infty$, en déduire

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(s)\,\mathrm{d}B_s = -\int_{\mathbb{R}_+} f'(s)B_s\,\mathrm{d}s.$$

Exercice 8 Quelle est la loi de $\int_0^t B_s \cos(t-s)\mathrm{d}s$?

Exercice 9 Quelle est la loi de $\int_0^1 t^n B_t \mathrm{d}t$?

Exercice 10 (Espace gaussien). Soit H^B l'espace gaussien engendré par $(B_t)_{t\geq 0}$:

$$H^B := \overline{\mathrm{Vect}(B_t \colon t \geq 0)}^{L^2(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})}.$$

1. Établir l'égalité

$$H^B = \left\{\int_{\mathbb{R}_+} f(s)\mathrm{d}B_s \colon f \in L^2(\mathbb{R}_+)\right\}.$$

2. Soit $X \in H^B$ et $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$. Montrer l'équivalence des deux conditions suivantes :
   (a) $X = \int_{\mathbb{R}_+} f(s)\,\mathrm{d}B_s$
   (b) $\mathbb{E}[XB_t] = \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 11 Calculer $\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{B_t}\int_0^t f(s)\mathrm{d}B_s\right]$, où f est $\mathscr{C}_1$.