APPLICATIONS DE LA FORMULE D'ITÔ

Dans toute la feuille, on admettre que la formule d'Itô pour $(f(B_t))_{t\geq 0}$ reste valable si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^2$ partout sauf en un nombre fini de points au voisinage desquels f'' est bornée.

Exercice 1 Soit (X_t) un processus d'Itô et soit $\beta_t = \mathrm{e}^{\int_0^t r_s \mathrm{d}s}$ où r est un processus continu. Calculer la décomposition en semi-martingale de $X_t\beta_t^{-1}$.

Exercice 2 Quelle est la loi du processus $X_t = \int_0^t \mathrm{sgn}(B_s)\mathrm{d}B_s$?

Exercice 3 Montrer que $\int_0^t \mathbf{1}_{B_s=0}\mathrm{d}B_s = 0$ presque sûrement.

Exercice 4 (Récurrence ou transience du mouvement brownien). Soit $z \in \mathbb{R}^2 \setminus 0$, et soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien plan *issu du point* z. Pour tout $a > 0$, on pose $\tau_a = \inf\{t \geq 0 : |B_t| = a\}$.

1. Vérifier que la fonction $u(z) = \log|z|$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2 \setminus 0$, c'est-à-dire $\Delta u = 0$.
2. On fixe $0 < r < R < \infty$ tel que $r < |z| < R$ et on pose $\tau := \tau_r \wedge \tau_R$. Que dire de $(u(B_{t\wedge\tau}))_{t\geq 0}$?
3. Calculer $\mathbb{P}(\tau_r < \tau_R)$, puis que $\mathbb{P}(\tau_r < \infty) = 1$ et interpréter le résultat.

Exercice 5 On veut généraliser l'exercice précédent en dimension $d > 2$.

1. Vérifier que $u(x) = |x|^{2-d}$ est harmonique.
2. Montrer que $\mathbb{P}(\tau_r < \tau_R) = (|z|^{2-d} - R^{2-d})/(r^{2-d} - R^{2-d})$.
3. En déduire que $\mathbb{P}(\tau_r < \infty) = (r/|z|)^{d-2} < 1$.

Exercice 6 Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien complexe.

1. Montrer que $f(B) = (f(B_t))_{t\geq 0}$ est une martingale continue.
2. Montrer que
$$\langle \mathrm{Re}(f(B))\rangle_t = \langle \mathrm{Im}(f(B))\rangle_t = |f'(B)|^2\mathrm{d}t \qquad\qquad \langle \mathrm{Re}(f(B)), \mathrm{Im}(f(B))\rangle_t = 0.$$
3. Montrer[1] qu'il existe un mouvement brownien plan $\tilde{B}$ tel que $f(B) = \tilde{B}_{F_t}$ où $F_t = \int_0^t |f'(B_s)|^2\mathrm{d}s$.

Exercice 7 (d'Alembert-Gauss). Soit $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un polynôme complexe non constant. En considérant le processus $(p(B_t))$ où B est un mouvement brownien complexe, montrer que p possède une racine.

Exercice 8 (Examen 2009). Soit $(B_t, \widetilde{B}_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien plan, et
$$X_t := \int_0^t B_s\,\mathrm{d}\widetilde{B}_s - \int_0^t \widetilde{B}_s\,\mathrm{d}B_s, \qquad (t \geq 0).$$

1. Montrer que $(X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale de carré intégrable.
2. Soit $\lambda > 0$. Justifier que pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}\left[\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\lambda X_t}\,\right] = \mathbb{E}\left[\,\cos(\lambda X_t)\right]$

1. On pourra utiliser le théorème de Ray-Knight, qui est la version multi-dimensionnelle du théorème de Dubins-Schwarz.

3. Soit $h \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Calculer la différentielle stochastique des processus suivants :

$$Y_t := \cos(\lambda X_t) \qquad \text{et} \qquad Z_t := h(t) - \frac{h'(t)}{2}(B_t^2 + \tilde{B}_t^2)$$

4. Calculer le crochet $\langle Y, Z \rangle$.
5. Montrer que $(Y_t e^{Z_t})_{t \geq 0}$ est une martingale locale dès que h vérifie $h'' = (h')^2 - \lambda^2$.
6. Vérifier que $h(t) = -\ln\cosh\big(\lambda r - \lambda t\big)$ est solution, pour tout $r \geq 0$.
7. En déduire $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\lambda X_t}]$, pour tout $t \geq 0$.

Exercice 9 (Loi de l'arcsinus). Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien réel. Soit

$$H_t := \int_0^t \mathbf{1}_{(B_s \geq 0)}\,\mathrm{d}s \qquad (t \geq 0).$$

Il s'agit de montrer que la variable aléatoire $\frac{H_t}{t}$ admet pour densité $x \mapsto \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$ sur $(0,1)$.

1. Étant donnés $\alpha, \beta > 0$, trouver $a, b \in \mathbb{R}$ pour que f satisfasse les conditions ci-dessus, avec

$$f(x) := \begin{cases} a\exp\left(-\sqrt{2(\alpha+\beta)}x\right) + \frac{1}{\alpha+\beta} & \text{si } x \geq 0 \\ b\exp\left(\sqrt{2\alpha}x\right) + \frac{1}{\alpha} & \text{si } x < 0. \end{cases}.$$

2. Construire une martingale bornée à partir de $\left(f(B_t)e^{-(\alpha t + \beta H_t)}\right)_{t \geq 0}$ et en déduire que

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\beta H_t}\right]\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)}}.$$

3. On admet que $\int_0^\infty \int_0^1 \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\frac{\mathrm{e}^{-\beta t x}}{\pi\sqrt{x(x-1)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)}}$ pour tout α et β, conclure.

Remarque. Pour calculer l'intégrale dans la dernière question, après avoir fait l'intégrale en t, on peut utiliser une intégrale de contour en choisissant de définir sur $\mathbb{C} \setminus (1,1)$ la racine dans l'intégrale. Alternativement on peut symétriser autour de $x = \frac{1}{2}$ ce qui donne une intégrale de la forme $\sqrt{1-y^2}$ puis faire un changement de variable en sinus.

Exercice 10 (Partiel 2015). Soit B un mouvement brownien réel et Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. On considère le processus

$$M_t = \Phi\left(\frac{B_t}{\sqrt{1-t}}\right), \qquad t \in [0,1[.$$

1. Calculer la décomposition en semi-martingale de M.
2. Montrer que $\lim_{t \to 1} M_t$ existe presque sûrement. On note M_1 la limite.
3. En déduire que $(M_t)_{t \in [0,1]}$ est une martingale.
4. Calculer la probabilité que B intersecte la courbe $t \mapsto \sqrt{1-t},\ t \in [0,1]$.

Exercice 11 (Temps local). Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien réel.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Calculer la différentielle stochastique du processus $(f_\varepsilon(B_t))_{t \geq 0}$, où

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } |x| \geq \varepsilon \\ \frac{1}{2}\left(\varepsilon + \frac{x^2}{\varepsilon}\right) & \text{si } |x| < \varepsilon \end{cases}.$$

2. On note Λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. En déduire que pour tout $t \geq 0$,

$$\frac{1}{2\varepsilon}\Lambda\left\{s \in [0,t] \colon |B_s| < \varepsilon\right\} \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{L^2} |B_t| - \int_0^t \mathrm{sgn}(B_s)\mathrm{d}B_s.$$