CHANGEMENTS DE MESURE

Exercice 1 . Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien réel sur un espace filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, et soit $T > 0$. Construire une mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ sur $\mathscr{F}_T$, équivalente à $\mathbb{P}$ (sur $\mathscr{F}_T$), sous laquelle le processus $(\exp(\sigma B_t + rt))_{0\leq t\leq T}$ est une martingale.

Exercice 2 Soit $(B_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement brownien réel. On pose $S_t = \mathrm{e}^{\sigma B_t - \frac{\sigma^2 t}{2}}$.

1. Montrer que $\mathrm{d}S_t = \sigma S_t \mathrm{d}B_t$ et calculer la décomposition en semi-martingale de $R_t = S_t^{-1}$.
2. Soit $\mathbb{Q}$ la mesure dont la densité par rapport à $\mathbb{P}$ est S_T. Trouver la loi de R_t sous $\mathbb{Q}$.
3. En déduire la *symétrie Put-Call* : pour tout $K > 0$,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(S_T - K)_+] = K\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(K^{-1} - S_T^{-1})_+].$$

Exercice 3 . Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien réel sur un espace filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, et soient $\phi, \psi \in \mathscr{H}^2_{\mathrm{loc}}$. Pour $t \geq 0$, on pose

$$Z_t := \exp\left(\int_0^t \phi(s)\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^t \phi^2(s)\mathrm{d}s\right) \qquad \text{et} \qquad Y_t := \int_0^t \psi(s)\,\mathrm{d}B_s - \int_0^t \psi(s)\phi(s)\mathrm{d}s.$$

1. Montrer que le processus $(Z_t Y_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale.
2. Soit T un réel positif tel que $\mathbb{E}[Z_T] = 1$. Montrer que $(Y_t)_{0\leq t\leq T}$ est une martingale locale sous une certaine probabilité $\mathbb{Q}$ sur $\mathscr{F}_T$ équivalente à $\mathbb{P}$, que l'on explicitera.

Exercice 4 (Dérive).Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien réel sur un espace filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ et soit $a > 0$ un nombre positif. On rappelle que $\tau_a := \inf\{t \geq 0 \colon B_t \geq a\}$ a pour densité

$$f_a(x) = \frac{a}{\sqrt{2\pi x^3}}\,\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2x}}\,\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

Étant donné $b \in \mathbb{R}$, on pose $X_t := B_t - bt$ et on s'intéresse à $\gamma_a := \inf\{t \geq 0 \colon X_t \geq a\}$.

1. Trouver une probabilité $\mathbb{Q}$ sur $\mathscr{F}_\infty$ sous laquelle $(X_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien.
2. En déduire, sous la mesure $\mathbb{P}$, la fonction de répartition de γ_a puis la loi de $Z := \sup_{t\geq 0} B_t - bt$.

Exercice 5 (Fonctionnelles quadratiques du brownien). Pour $a, b, t \geq 0$, on cherche à calculer

$$I(a,b) := \mathbb{E}\left[\exp\left\{-aB_t^2 - \frac{b^2}{2}\int_0^t B_s^2 \mathrm{d}s\right\}\right].$$

1. Calculer $I(a, 0)$ pour tout a. On supposera désormais $b > 0$.
2. Trouver un processus ψ localement intégrable tel que le processus $(Z_t)_{t\geq 0}$ défini ci-dessous soit une martingale locale :

$$Z_t := \exp\left\{-b\int_0^t B_s\,dB_s - \int_0^t \psi(s)\,ds\right\}.$$

3. Exprimer Z_t en fonction de b, t, B_t et $\int_0^t B_s^2 \, \mathrm{d}s$ seulement, et en déduire que

$$I(a,b) = \mathbb{E}\left[Z_t \exp\left\{\left(\frac{b}{2} - a\right) B_t^2\right\}\right] \exp\left(-\frac{bt}{2}\right).$$

4. Construire une probabilité $\mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ sous laquelle le processus $(W_t)_{t\geq 0}$ défini par $W_t := B_t + b\int_0^t B_s \mathrm{d}s$ soit un mouvement brownien.
5. Montrer que pour tout $t \geq 0$,

$$B_t = \int_0^t \mathrm{e}^{b(s-t)} \, \mathrm{d}W_s.$$

6. Pour $t \geq 0$ fixé, expliciter la loi de B_t sous la mesure $\mathbb{Q}$ et en déduire la formule suivante :

$$I(a,b) = \left\{\cosh(bt) + \frac{2a}{b}\sinh(bt)\right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Exercice 6 Soit $B = (B_t)_{t\in[0,1]}$ un mouvement brownien et H un processus localement intégrable. On note $\mathbb{Q}$ la mesure de probabilité dont la densité par rapport à $\mathbb{P}$ est $Z = \exp(-\int_0^1 H_s \mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^1 H_s^2 \mathrm{d}s)$. On rappelle que la divergence de Kullback-Leibler entre deux mesures équivalentes μ, ν est définie par

$$\mathrm{d}_{\mathrm{KL}}(\mu \mid \nu) = \int \left(\ln \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}\right) \mathrm{d}\mu.$$

1. Calculer $\mathrm{d}_{\mathrm{KL}}(\mathbb{Q} \mid \mathbb{P})$.
2. Calculer $\mathrm{d}_{\mathrm{KL}}(\mathbb{P} \mid \mathbb{Q})$.

Exercice 7 (Condition de Novikov). Soit $\phi \in \mathscr{H}^2_{\mathrm{loc}}$. On pose pour tout $t \geq 0$,

$$Z_\phi(t) := \exp\left\{\int_0^t \phi(s)\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^t \phi^2(s)\mathrm{d}s\right\}.$$

Le but est de démontrer que $(Z_\phi(t))_{t\geq 0}$ est une martingale sous la condition de Novikov :

$$\forall t \geq 0, \qquad \mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t \phi^2(s)\mathrm{d}s\right\}\right] < \infty. \tag{$\star$}$$

1. Que peut-on dire du processus $(Z_\phi(t))_{t\geq 0}$ en général ? Et si $\mathbb{E}[Z_\phi(t)] = 1$ pour tout $t \geq 0$?
2. Soit $0 < \lambda < 1$. Trouver $p > 1$ et $0 < \theta < 1$ tels que pour tout $t \geq 0$,

$$Z^p_{\lambda\phi}(t) = Z^\theta_\phi(t) \exp\left\{\frac{1-\theta}{2}\int_0^t \phi^2(s)\mathrm{d}s\right\}.$$

3. En déduire que sous la condition ($\star$), on a $\mathbb{E}[Z_{\lambda\phi}(t)] = 1$ pour tout $t \geq 0$.
4. Montrer par ailleurs que pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}[Z_{\lambda\phi}(t)] \leq \mathbb{E}\left[Z_\phi(t)\right]^{\lambda^2} \mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t \phi(s)\mathrm{d}B_s\right\}\right]^{2\lambda(1-\lambda)}.$$

5. Vérifier que le membre droit est fini sous la condition ($\star$), et conclure.