

## ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES

**Exercice 1** (Diffusion linéaire). Étant donnés des réels  $\mu, \nu, \sigma, \tau$  et  $x$ , on considère l'EDS

$$dX_t = (\mu X_t + \nu) dt + (\sigma X_t + \tau) dB_t, \quad X_0 = x. \quad (1)$$

1. Montrer que cette équation admet une unique solution forte.
2. Expliciter la solution  $(S_t)_{t \geq 0}$  du cas particulier  $\nu = \tau = 0$  et  $x_0 = 1$ .
3. Dans le cas général, calculer la différentielle stochastique de  $(X_t/S_t)_{t \geq 0}$ .
4. En déduire une expression pour  $(X_t)_{t \geq 0}$ .
5. Dans le cas particulier  $\sigma = 0$ , déterminer complètement la loi de  $X_t$ .

**Exercice 2** (Diffusion linéaire non homogène). On va résoudre la version non-homogène de (1), c'est-à-dire l'EDS suivante :

$$dX_t = (\mu(t)X_t + \nu(t)) dt + (\sigma(t)X_t + \tau(t)) dB_t, \quad X_0 = \zeta,$$

où  $\mu, \nu, \sigma, \tau : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  sont boréliennes bornées et  $\zeta$  est une variable aléatoire de carré intégrable, indépendante de  $(B_t)_{t \geq 0}$ .

1. Montrer que cette équation admet une unique solution forte.
2. En s'aidant de l'exercice précédent, trouver une solution dans le cas où  $\nu = \tau = 0$ .
3. Résoudre le cas général.

**Exercice 3** (Changement de variable). Résoudre l'EDS suivante, pour  $t \in [0, 1)$  :

$$dZ_t = -\frac{Z_t}{1-t} dt + dB_t, \quad Z_0 = 0.$$

Que dire du processus  $(Z_t)_{0 \leq t < 1}$  ?

**Exercice 4** Résoudre l'EDS suivante (dans  $\mathbb{R}^2$ ) :

$$dX_t = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X_t dB_t - \frac{X_t}{2} dt, \quad X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Exercice 5** (Explosion). Trouver une solution à l'EDS suivante :

$$dX_t = X_t^2 dB_t + X_t^3 dt, \quad X_0 = 1.$$

Que dire de cette solution ?

**Exercice 6** [Autour du processus d'Ornstein-Uhlenbeck] Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  une solution de l'EDS suivante dans  $\mathbb{R}^2$  :

$$dX_t = -\gamma X_t dt + dB_t, \quad X_0 = x$$

où  $\gamma$  est un nombre réel et  $x \in \mathbb{R}^2$ .

1. Quelle est la loi de  $X_t$  ?
2. On suppose maintenant que  $X_0 = \xi$  où  $\xi$  est une variable aléatoire indépendante de  $B$ . Trouver la loi de  $X_t$ . Quelle loi faut-il choisir pour  $\xi$  afin que le processus  $X_t$  soit stationnaire ?
3. Soit  $(R_t, \theta_t) \in ]0, \infty[ \times ]0, 2\pi[$  la décomposition polaire de  $X_t$ . Trouver une EDS satisfaite par  $(R_t, \theta_t)$ .

**Exercice 7 (Non-unicité).** On considère l'EDS suivante :

$$dX_t = 3X_t^{2/3} dB_t + 3X_t^{1/3} dt \quad X_0 = 0. \quad (2)$$

1. On pose  $f_a(x) = (x - a)^3 \mathbf{1}_{x > a}$ . Montrer que  $f_a$  est  $\mathcal{C}^2$ .
2. Montrer que pour tout  $a > 0$ , le processus  $(f_a(B_t))_{t \geq 0}$  est une solution de (2).

**Exercice 8 (Changement de variable).** Établir l'existence d'une unique solution forte à l'EDS

$$dX_t = \left( \sqrt{1 + X_t^2} + \frac{X_t}{2} \right) dt + \sqrt{1 + X_t^2} dB_t, \quad X_0 = x$$

puis la déterminer explicitement en effectuant le changement de variable  $Y_t = \operatorname{argsinh}(X_t)$ .

**Exercice 9 (Examen 2015).** On se donne une constante  $\sigma > 0$  et on considère l'EDS

$$dX_t = -\frac{X_t}{1+t} dt + \frac{\sigma}{1+t} dB_t, \quad X_0 = 0.$$

1. Justifier que cette EDS admet une unique solution  $(X_t)_{t \geq 0}$ .
2. Calculer la différentielle stochastique du processus  $(Y_t)_{t \geq 0}$  défini par  $Y_t := (1+t)X_t$ . En déduire la forme explicite de  $(X_t)_{t \geq 0}$ . Justifier que  $X_t \rightarrow 0$  quand  $t$  tend vers l'infini.
3. On fixe  $a > 0$  et on note  $\tau_a := \inf\{t \geq 0 : X_t \geq a\}$ . Pour  $t \geq 0$ , on pose

$$M_t := \exp\left(\frac{2at}{\sigma^2}(X_t - a) + \frac{2a}{\sigma^2}X_t\right).$$

Montrer que  $(M_t)_{t \geq 0}$  est une martingale, et en déduire la valeur de  $\mathbb{P}(\tau_a < \infty)$ .

4. Conclure que la variable aléatoire  $X^* := \sup_{t \geq 0} X_t$  est la racine carrée d'une variable aléatoire de loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

**Exercice 10 (Examen 2015).** Soit  $x$  un nombre réel. On considère l'EDS

$$dX_t = dB_t - \frac{X_t}{1 + X_t^2} dt, \quad X_0 = x.$$

1. Justifier que cette équation différentielle stochastique admet une unique solution  $(X_t)_{t \geq 0}$ .
2. Justifier que le processus  $(Z_t)_{t \geq 0}$  est une martingale, où

$$Z_t := \exp\left\{\int_0^t \frac{X_s}{1 + X_s^2} dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{X_s^2}{(1 + X_s^2)^2} ds\right\}.$$

3. Calculer la différentielle stochastique de  $(\ln(1 + X_t^2))_{t \geq 0}$  et en déduire que pour  $t \geq 0$ ,

$$\frac{1 + X_t^2}{1 + x^2} = Z_t^2 \exp\left\{\int_0^t \frac{1 - 2X_s^2}{(1 + X_s^2)^2} ds\right\}.$$

4. Construire une probabilité  $\mathbb{Q}$  sous laquelle  $(X_s - x)_{s \geq 0}$  est un mouvement brownien.  
 5. On fixe  $t \geq 0$ . En déduire que pour  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  mesurable, on a  $\mathbb{E}[h(X_t)] = \widehat{h}(x)$  avec

$$\widehat{h}(x) := \mathbb{E} \left[ h(x + B_t) \left( \frac{1 + x^2}{1 + (x + B_t)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1 - 2(x + B_s)^2}{(1 + (x + B_s)^2)^2} ds \right\} \right].$$

6. Soit  $\zeta$  une variable aléatoire indépendante de  $(B_s)_{s \geq 0}$ , de densité  $x \mapsto (\pi(1 + x^2))^{-1}$ . On note  $(X_s^*)_{s \geq 0}$  la solution de l'EDS ci-dessus avec  $X_0^* = \zeta$ . Ainsi, on a  $\mathbb{E}[h(X_t^*) | \zeta] = \widehat{h}(\zeta)$ .  
 (a) Vérifier que le processus  $(B_{t-s} - B_t)_{s \in [0, t]}$  est un mouvement brownien restreint à  $[0, t]$ .  
 (b) En déduire que pour tout  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  mesurable,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{h}(x)}{1 + x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{h(x)}{1 + x^2} dx.$$

- (c) Pour  $t \geq 0$ , quelle est la loi de  $X_t^*$  ?

**Exercice 11** (Examen 2016). On considère l'équation différentielle stochastique

$$X_0 = 0, \quad dX_t = \frac{1}{2(1 + X_t^2)} dt + \frac{1}{\sqrt{1 + X_t^2}} dB_t,$$

où  $B$  désigne un mouvement brownien réel. Le but est d'étudier les variables aléatoires

$$X_* := \inf\{X_t: t \geq 0\} \in [-\infty, 0] \quad \text{et} \quad X^* := \sup\{X_t: t \geq 0\} \in [0, +\infty].$$

- Justifier que cette EDS admet une unique solution forte.
- Trouver  $F \in \mathcal{C}^2$  avec  $F(0) = 1, F(\infty) = 0$ , telle que  $(F(X_t))_{t \geq 0}$  soit une martingale locale.
- Soient  $a, b > 0$ . On pose  $\tau := \tau_{-a} \wedge \tau_b$ , où pour tout  $r \in \mathbb{R}$ ,  $\tau_r := \inf\{t \geq 0: X_t = r\}$ .  
 (a) Montrer que  $(e^{-X_{t \wedge \tau}})_{t \geq 0}$  est une martingale de carré intégrable, et que pour  $t \geq 0$ ,

$$\mathbb{E}[e^{-2X_{t \wedge \tau}}] = 1 + \mathbb{E} \left[ \int_0^{t \wedge \tau} \frac{e^{-2X_s}}{1 + X_s^2} ds \right].$$

- (b) En déduire une constante  $C(a, b)$  telle que pour tout  $t \geq 0$ ,  $\mathbb{E}[t \wedge \tau] \leq C(a, b)$ .  
 4. Déduire des deux questions précédentes que

$$\mathbb{P}(\tau_{-a} < \tau_b) = \frac{1 - e^{-b}}{e^a - e^{-b}} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\tau_{-a} > \tau_b) = \frac{e^a - 1}{e^a - e^{-b}}.$$

5. Conclure que  $X^* = \infty$  p.s. et que  $-X_*$  suit une loi exponentielle.

**Exercice 12** (Monotonie). Soient  $b, \sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions lipschitziennes, et  $x \leq y$  des réels. On note  $(X_t)_{t \geq 0}$  et  $(Y_t)_{t \geq 0}$  les solutions de  $dZ_t = b(Z_t) dt + \sigma(Z_t) dB_t$  avec  $X_0 = x$  et  $Y_0 = y$ .

1. Justifier que le processus  $(U_t)_{t \geq 0}$  défini par la formule suivante a bien un sens :

$$U_t := \int_0^t \frac{\sigma(X_s) - \sigma(Y_s)}{X_s - Y_s} \mathbf{1}_{X_s \neq Y_s} dB_s + \int_0^t \frac{b(X_s) - b(Y_s)}{X_s - Y_s} \mathbf{1}_{X_s \neq Y_s} ds.$$

2. Établir l'identité suivante, valable pour tout  $t \geq 0$  :

$$X_t - Y_t = (x - y) \exp \left\{ U_t - \frac{1}{2} \int_0^t \left( \frac{\sigma(X_s) - \sigma(Y_s)}{X_s - Y_s} \right)^2 \mathbf{1}_{X_s \neq Y_s} ds \right\}.$$

3. En déduire que presque-sûrement :  $\forall t \geq 0, X_t \leq Y_t$ .

**Exercice 13** (Sinh du brownien). Soit  $((B_t, C_t))_{t \geq 0}$  un brownien plan. Pour  $t \geq 0$ , on pose

$$Y_t := \int_0^t e^{C_t - C_s} dB_s \quad \text{et} \quad W_t := \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1 + Y_s^2}} dB_s + \int_0^t \frac{Y_s}{\sqrt{1 + Y_s^2}} dC_s.$$

1. Montrer que  $(W_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien réel.
2. Vérifier que  $(Y_t)_{t \geq 0}$  est solution de l'équation différentielle stochastique

$$dY_t = \sqrt{1 + Y_t^2} dW_t + \frac{Y_t}{2} dt; \quad Y_0 = 0.$$

3. Pour  $t \geq 0$ , on pose  $X_t := \sinh(W_t)$ . Quelle équation différentielle stochastique vérifie le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$ ? Que peut-on en conclure?
4. Pour  $0 \leq s \leq t$ , on pose  $\tilde{B}_s^t := B_t - B_{t-s}$ . On rappelle que  $(\tilde{B}_s^t)_{0 \leq s \leq t}$  est un mouvement brownien sur  $[0, t]$ . Prouver l'identité suivante, valable pour tout  $f \in L^2([0, t])$  :

$$\int_0^t f(s) dB_s = \int_0^t f(t-s) d\tilde{B}_s^t.$$

5. Pour  $t \geq 0$ , on pose  $Z_t := \int_0^t e^{C_s} dB_s$ . Montrer que pour tout  $t \geq 0$ ,  $Z_t$  a même loi que  $Y_t$ .
6. Montrer que  $(Y_t)_{t \geq 0}$  n'est pas une martingale, mais que  $(Z_t)_{t \geq 0}$  en est une.