Recueil d'exercices.

Voici tous les exercices donnés aux étudiants des groupes 2 et 5 du cours d'analyse vectorielle de J.-F. Babadjian (2M216). Certains sont munis d'indications ou parfois de solutions. Ils sont présentés à peu près dans l'ordre du cours, à savoir

- normes d'espaces vectoriels
- notions de topologie dans $\mathbb{R}^n$
- continuité
- différentiabilité
- différentielles d'ordre supérieur
- recherche des extremums
- intégrales en plusieurs variables
- théorèmes de Fubini et de changement de variables
- exemples faciles d'équations aux dérivées partielles
- courbes paramétrées
- circulation et formule de Stokes.

La plupart des exercices sont faciles et résultent d'applications immédiates du cours. D'autres sont nettement plus difficiles et sont marqués d'une ou plusieurs étoiles ($\star$). On y trouvera des exercices d'oral de concours ou des problèmes qui ont pour objectif de présenter des résultats intéressants et plus avancés.

Il y a encore (beaucoup) d'erreurs. Veuillez me les signaler à l'adresse `simon@scoste.fr`.

Exercice 1 (normes $||\cdot||_p$). On rappelle que les normes $||\cdot||_p$, pour $p \in [1,+\infty]$, sont définies par les formules suivantes :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \qquad \|x\|_\infty = \sup_{1\le i\le n} |x_i|. \tag{1}$$

1. Démontrer que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.
2. Démontrer que

   $$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty \quad \text{et} \quad \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty,$$

   pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Discuter le cas $n = 1$.
3. Représenter dans $\mathbb{R}^2$ la boule unité fermée $\{x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_p \le 1\}$ pour $p = 1$, 2 et ∞.

Indication. L'inégalité triangulaire pour la norme 2 est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 2. Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\lim_{p\to\infty} ||x||_p = ||x||_\infty.$$

Indication. On peut commencer par simplifier le problème sans aucune perte de généralité, par exemple en supposant que $||x||_\infty = 1$ et que tous les coefficients de x sont positifs... Pourquoi ? Si $||x||_\infty = 1$, cela veut dire qu'il existe des indices i tels que $x_i = 1$. Que dire des autres ?

Exercice 3 (inégalités de Hölder et de Minkowski : $\star$). L'objectif de cet exercice est de prouver que $||\cdot||_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$ pour tout $p \in]1,+\infty[$. Dans toute la suite, on fixe $p > 1$.

1. Vérifier que $||\cdot||_p$ vérifie les propriétés d'homogénéité et de séparation.
2. (a) Montrer l'égalité suivante, valable pour tous $s,t \geqslant 0$:

   $$st \leqslant \frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q}$$

   où $q > 1$ est l'unique nombre réel vérifiant

   $$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

   (*Deux nombres p,q tels que $p^{-1} + q^{-1} = 1$ sont appelés des nombres conjugués.*)

   (b) Soient $x = (x_i)_{i\leqslant n}$ et $y = (y_i)_{i\leqslant n}$ deux éléments de $\mathbb{R}^n$. On pose $\alpha = \|x\|_p$ et $\beta = \|y\|_q$. Montrer que pour tout $i \in \{1,...,n\}$, on a

   $$\frac{|x_i y_i|}{\alpha\beta} \le \frac{|x_i|^p}{p\alpha^p} + \frac{|y_i|^q}{q\beta^q}.$$

   (c) En déduire l'inégalité de Hölder et Minkowski :

   $$|\langle x,y\rangle| \leqslant ||x||_p||y||_q.$$

   En quoi est-ce une généralisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz ?

   (d) Donner un sens à l'inégalité de Hölder lorsque $p = 1$.
3. (a) Si s et t sont des nombres réels, montrer que $|t+s|^p \leqslant |t+s|^{p-1}|s| + |t+s|^{p-1}|t|$.

   (b) En déduire que $\|\cdot\|_p$ vérifie l'inégalité triangulaire (l'inégalité triangulaire pour les normes $||\cdot||_p$ s'appelle *inégalité de Minkowski*). Conclure.

À gauche, Otto Hölder, mathématicien allemand (1859-1937). À droite, Hermann Minkovski, mathématicien allemand (1864-1909). L'inégalité de Hölder a été démontré en 1888 par Rogers, puis indépendamment par Hölder en 1898.

Indication. La question 2a résulte d'une simple étude de fonction : par exemple, on peut fixer t et étudier $\phi : s \to st - s^p/p - t^q/q$. Pour la question 2c, il suffit de sommer les inégalités de la question précédente ! Pour la question 3a, remarquer que $|t+s|^p = |t+s|^{p-1}|t+s|$ et utiliser l'inégalité triangulaire.

Exercice 4 (gymnastique höldérienne)**.** Soient p, q deux nombres conjugués, avec $p \geqslant 1$.

1. Soit $x = (x_1, ..., x_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$. Montrer l'inégalité suivante :
$$||x||_1 \leqslant n^{\frac{1}{q}} ||x||_p.$$
2. Montrer l'inégalité suivante :
$$\sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^{\frac{4}{3}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$
3. Soient $a = (a_n)_{n \geqslant 0}$ et $b = (b_n)_{n \geqslant 0}$ deux suites réelles. Montrer l'inégalité suivante :
$$\sum_{n \geqslant 0} |a_n b_n| \leqslant \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$
4. Soit $a = (a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite réelle. Montrer l'inégalité suivante :
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{a_k}{\sqrt{k}} \right| \leqslant 6^{-1/4} \sqrt{\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{\frac{4}{3}} \right)^{\frac{3}{4}}.$$
5. Montrer l'inégalité suivante pour tout $t \in]0,1[$:
$$\sum_{k=0}^{n} a_k t^k \leqslant \frac{||x||_2}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Indication. Il suffit d'appliquer l'inégalité de Hölder avec art et subtilité... Pour la première question, remarquer que $x_i = x_i \times 1$. Pour la deuxième, remarquer que $|x_i| = |x_i|^{\frac{1}{3}} |x_i|^{\frac{2}{3}}$. Pour la troisième, passer à la limite. Pour la quatrième, prendre $p = 4$ et reconnaître la (célèbre) égalité $\zeta(2) = \pi^2/6$... Pour la dernière, reconnaître un développement limité bien connu.

Exercice 5. Montrer qu'une réunion d'ensembles ouverts est encore ouverte. Une intersection d'ouverts est-elle nécessairement ouverte ?

Exercice 6. Montrer qu'une intersection d'ensembles fermés est encore fermée. Une réunion de fermés est-elle nécessairement fermée ?

Exercice 7. Un ensemble qui n'est pas ouvert est-il fermé ?

Solution. $[0,1[$.

Exercice 8. Montrer que les singletons sont fermés. Sont-ils ouverts ?

Exercice 9. Représenter graphiquement (si possible) les ensembles suivants et déterminer s'ils sont ouverts, fermés ou ni l'un ni l'autre.

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x-1| < 1\} \;; \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\} \;;$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1,\ |y| \leq 1\} \;; \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{Q}\} \;;$$
$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \notin \mathbb{Q},\ y \notin \mathbb{Q}\} \;; \qquad F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 4,\ x > 0\}.$$

Exercice 10. Soit (x_n) une suite dans $\mathbb{R}^n$ qui converge vers x. Montrer que l'ensemble

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$

est un ensemble compact.

Exercice 11. Montrer que la réunion de deux ensembles compacts est encore compacte.

Exercice 12. Que dire d'un espace vectoriel normé borné ?

Exercice 13. L'intérieur de l'adhérence d'un ensemble est-il égal à cet ensemble ?

Exercice 14. Que dire d'un espace vectoriel réel normé E tel que toutes les fonctions sur E sont continues ?

Indication. Si E est de dimension 1 ou plus, essayer de construire une fonction non continue...

Exercice 15. L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ est-il de dimension finie ?

Indication. Trouver une suite libre de fonctions continues.

Exercice 16. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme quelconque. Montrer que les sous-espaces vectoriels stricts de $\mathbb{R}^n$ sont des fermés d'intérieur vide.

Indication. Si une partie de $\mathbb{R}^n$ est ouverte, elle contient une boule ouverte. Si en plus c'est un sous-espace vectoriel, elle contient sans doute une base...

Exercice 17. Déterminer et représenter l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$f_1 : (x,y) \mapsto \sqrt{\frac{2x+3}{y-2}} \qquad f_2 : (x,y) \mapsto \ln(x+y+1)$$
$$f_3 : (x,y) \mapsto \frac{\ln(1+x)-\ln(1+y)}{x^2-y^2} \qquad f_4 : (x,y) \mapsto \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{x}}$$
$$f_5 : (x,y) \mapsto \frac{1}{\cos(x-y)} \qquad f_6 : (x,y,z) \mapsto \tan(\sqrt{x^2+y^2+z^2}).$$

Exercice 18. Les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants sont-ils ouverts ? fermés ? compacts ?

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - \sin(y) \leq 4\}$
2. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 - 4e^y > 4\}$
3. $C = \{(x,y) \in [0,1]^2 : \cos(x) \geq 0\}$

Indication. Pour montrer qu'un fermé est compact, il faut montrer qu'il est borné.

Exercice 19 ($\star$)**.** Montrons que l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert.

Indication. Il existe un critère célèbre qui relie l'inversibilité d'une matrice à son déterminant... Le déterminant est-il une fonction continue ?

Pour la deuxième question : le rang est-il continu ? La caractérisation séquentielle des ouverts et des fermés est peut-être utile...

Solution. On peut identifier sans problèmes $\mathbb{R}^{n^2}$ et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, au sens où il existe entre ces deux ensembles un isomorphisme d'espace vectoriel. Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application qui, à un élément $M = (m_{i,j})$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ associe le déterminant de la matrice M, c'est-à-dire $f(M) = \det(M)$. D'après les formules du cours d'algèbre linéaire, f est une fonction polynomiale en les éléments de M, et donc continue.

Il est bien connu que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices inversibles, est exactement l'ensemble des matrices dont le déterminant est non nul. Ainsi,

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\mathbb{R}^*).$$

L'ensemble $\mathbb{R}^*$ est ouvert, et la fonction f est continue. L'ensemble des matrices inversibles est donc ouvert, comme image réciproque d'un ouvert par une fonction continue.

Exercice 20 ($\star\star$)**.** L'ensemble des matrices de rang r, pour $r \in \{0,...,n\}$, est-il ouvert en général ?

Exercice 21. On rappelle que la distance entre deux ensembles E et F de $\mathbb{R}^n$ est définie par

$$d(E,F) = \inf\{d(x,y) \mid (x,y) \in E \times F\}.$$

Soit K_1 et K_2 deux compacts de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $x \in K_1$ et $y \in K_2$ tels que $d(K_1,K_2) = d(x,y)$, où d désigne la distance euclidienne.

Indication. Commencer par vérifier que le produit cartésien $K_1 \times K_2$ est lui-même compact. On rappelle qu'une fonction continue, définie sur un compact et à valeurs réelles atteint ses bornes.

Exercice 22 (cours)**.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application continue. Montrer que l'image par f d'un ensemble compact est compacte.

L'image réciproque d'un compact par une fonction continue est-elle compacte en général ?

Exercice 23 (fonctions coercives)**.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application continue.

1. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) Pour tout $M > 0$, il existe $R > 0$ tel que si $||x|| > R$, alors $f(x) > M$.
   (b) Pour toute partie bornée B de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(B)$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^n$.
   (c) Pour toute partie compacte K de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(K)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$.
2. On suppose dans cette question que f est strictement positive et que $f(x) \to +\infty$ quand $||x|| \to +\infty$ (une telle fonction est dite *coercive*). La fonction f admet-elle un minimum ? Que peut-on en dire ?

Indication. 1. On peut montrer que (a) implique (b) en supposant par l'absurde (a) et non (b). (Il peut être commode de passer par la contraposée de (a)). On peut montrer (b) implique (c) très directement. Enfin on peut montrer (c) implique (a) directement (encore une fois avec la contraposée de (a)).

2. Peut-on faire le lien avec la question précédente ? Se demander à quel point l'hypothèse de positivité de f est nécessaire pour conclure.

Exercice 24 (normes d'opérateurs)**.** On munit $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, d'une norme quelconque notée $\|\cdot\|$. Soit ℓ une application linéaire, $\ell \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$.

1. L'application ℓ est-elle continue sur $\mathbb{R}^n$?
2. La sphère unité $\mathscr{S} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ est-elle fermée ou ouverte dans $\mathbb{R}^n$? Est-elle bornée ?
3. En déduire, en argumentant avec précision, que la quantité
$$|||\ell||| = \max_{\|x\|=1} \|\ell(x)\|$$
est bien définie.
4. Montrer que pour tout y non nul, on a $\|\ell(y)\| \leq |||\ell||| \|y\|$.
5. En déduire que
$$\sup_{y \neq 0} \frac{\|\ell(y)\|}{\|y\|} \leq |||\ell|||$$
puis qu'il y a égalité dans cette inégalité (on pourra pour cela utiliser la question 3).

Indication. Il a été vu en cours que sur $\mathbb{R}^n$, les applications linéaires sont continues. D'autre part, on vérifie sans peine que $\mathscr{S}$ est bornée (c'est évident) et fermée (c'est l'image réciproque du fermé $\{1\}$ par l'application continue $x \mapsto \|x\|$), donc compacte. En particulier, les applications continues y sont bornées et atteignent leurs bornes...

Exercice 25. Étudier l'existence des limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x+y}$; (b) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz+z^3}{2x^3+yz^2}$; (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}$;

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y}{x^2-y^2}$; (e) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz}{x^2+2y^2+3z^2}$; (f) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x+y+z}$.

Indication. Globalement, il y a deux manières de montrer l'existence d'une limite pour des fonctions explicites : en utilisant l'équivalence des normes dans $\mathbb{R}^n$ ou, dans $\mathbb{R}^2$ et pour une limite en $(0,0)$, en passant en coordonnées polaires (et il faut bien comprendre que ces deux manières se confondent, du fait du lien entre coordonnées polaires et $\|\cdot\|_2$!).

Il n'y a par contre qu'une seule manière de montrer l'inexistence d'une limite : construire deux « chemins » $(x,y) = (x, f_1(x))$ et $(x,y) = (x, f_2(x))$ tels que la fonction, évaluée en ces deux chemins, ait deux limites différentes. C'est une contradiction de l'unicité de la limite. Le premier chemin est en général aussi simple que possible (typiquement $f_1(x) = x$). Le second doit être plus astucieux et utiliser la forme particulière de la fonction. Dans $\mathbb{R}^2$ et pour une limite en $(0,0)$, il est possible de chercher un chemin en coordonnées polaires $(r,\theta) = (r, f(r))$.

Les résultats attendus sont les suivants :

(a) N'existe pas.

(b) N'existe pas.

(c) Existe et vaut $+\infty$.

(d) N'existe pas.

(e) N'existe pas.

(f) N'existe pas.

Exercice 26. Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$. Démontrer que
$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0$$
et que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

Indication. Les deux premières limites (imbrications de limites dans $\mathbb{R}$) se calculent directement. La limite dans $\mathbb{R}^2$ n'existe pas à partir du moment où on trouve un « chemin » $(x,y) = (x, g(x))$ tel que $f(x, g(x))$ ne tende pas vers 0. Faire simple !

Exercice 27. Étudier la continuité des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$ par

1. $f_1(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f_1(0,0) = 0$;
2. $f_2(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f_2(0,0) = 0$.

On étudiera également la continuité des applications partielles au point $(0,0)$.

Indication.
1. Peut-on utiliser l'équivalence des normes pour en déduire le résultat ? Si non, y a-t-il un « chemin » $(x,y) = (x, f(x))$ particulier (puisqu'on est dans $\mathbb{R}^2$ et au voisinage de $(0,0)$, on peut passer par les coordonnées polaires, $(r,\theta) = (r, f(r))$) qui donne une limite différente de $f_1(0,0) = 0$?
2. Mêmes questions.

Se rappeler du lien entre continuité de la fonction et continuité des fonctions partielles. Se rappeler aussi de la définition des fonctions partielles et donc de ce que signifie leur continuité.

Exercice 28. Prolonger par continuité en $(0,0)$ la fonction $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = xy \ln(x^2+y^2)$.

Indication. Bien lire la question : elle donne d'office la réponse quant à l'existence de la limite. Sachant ceci, il y a deux manières de calculer une limite pour des fonctions explicites : en utilisant l'équivalence des normes dans $\mathbb{R}^n$ ou, dans $\mathbb{R}^2$ et pour une limite en $(0,0)$, en passant en coordonnées polaires (et il faut bien comprendre que ces deux manières se confondent, du fait du lien entre coordonnées polaires et $\|\cdot\|_2$!).

Exercice 29 ($\star$). On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$ par

$$f(x,y) = \frac{\sin x - \sin y}{x-y}.$$

Peut-on prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$?

Indication. Il y a deux manières qualitativement très différentes de traiter cet exercice.

Pour commencer, s'il y a une limite quand $(x,y) \to (x_0, x_0)$, qu'est-elle ?

Ensuite, pour vérifier rigoureusement cette conjecture, on peut :

1. utiliser les formules de trigonométrie ;
2. observer, plus généralement, qu'il doit y avoir une preuve générale pour des fonctions de ce type où la fonction sin est remplacé par une fonction g quelconque (satisfaisant tout de même certaines hypothèses à déterminer). Observer ensuite que $f(x,y)$ ressemble beaucoup à une quantité bien connue du cours d'analyse réelle et retrouver le théorème adéquat.

La seconde preuve est beaucoup plus longue mais présente l'avantage de s'appliquer à une bien plus large classe de fonctions [1].

Exercice 30 ($\star$). Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n.

1. Montrer qu'il s'agit d'un espace vectoriel réel.
2. On définit une application $N : \mathbb{R}_n[X] \to]0, +\infty[$ par

$$N(P) = \sum_{i=0}^{n} |P(i)|.$$

Montrer que N est une norme.

1. Et de ne pas nécessiter une connaissance par cœur du formulaire de trigo...

3. Soit $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(P) = P(\pi).$$

Cette fonction est-elle continue pour la norme N ?

Indication. Pour la première question, la seule difficulté provient de la séparation... Que dire de $P(i)$ si on a $\sum_{i=0}^{n} |P(i)| = 0$?

Exercice 31. La dérivée d'une fonction dérivable est-elle toujours continue ?

Indication. On pourra étudier la régularité de la fonction réelle $x \mapsto x^2 \sin(x)$...

Exercice 32. Une application linéaire sur $\mathbb{R}^n$ est-elle différentiable ? Est-elle deux fois différentiable ? Est-elle de classe $\mathscr{C}^\infty$?

Exercice 33. La norme euclidienne est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^n$? Et les normes $||\cdot||_p$?

Indication. La fonction $t \mapsto |t|$ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 34. Calculer les dérivées partielles (lorsqu'elles sont définies) des applications suivantes :

$$f_1 : (x,y) \mapsto \sqrt{\frac{2x+3}{y-2}} \ ; \qquad f_2 : (x,y) \mapsto \ln(x+y+1) \ ; \qquad f_3 : (x,y) \mapsto \frac{\ln(1+x) - \ln(1+y)}{x^2 - y^2} \ ;$$

$$f_4 : (x,y) \mapsto \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{x}} \ ; \qquad f_5 : (x,y) \mapsto \frac{1}{\cos(x-y)} \ ; \qquad f_6 : (x,y,z) \mapsto \tan(\sqrt{x^2+y^2+z^2}).$$

Solution. Les résultats à obtenir sont :

$$\partial_x f_1(x,y) = \left((y-2)\sqrt{\frac{2x+3}{y-2}}\right)^{-1},$$

$$\partial_y f_1(x,y) = \frac{\sqrt{\frac{2x+3}{y-2}}}{4-2y},$$

$$\partial_x f_2(x,y) = \partial_y f_2(x,y) = \frac{1}{x+y+1},$$

$$\partial_x f_3(x,y) = \frac{\frac{x^2-y^2}{x+1} - 2x(\ln(1+x) - \ln(1+y))}{(x^2-y^2)^2},$$

$$\partial_y f_3(x,y) = \frac{\frac{y^2-x^2}{y+1} + 2y(\ln(1+x) - \ln(1+y))}{(x^2-y^2)^2},$$

$$\partial_x f_4(x,y) = -\frac{y}{x^2}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{x}}\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right) - 1\right),$$

$$\partial_y f_4(x,y) = \frac{1}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{x}}\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right) - 1\right),$$

$$\partial_x f_5(x,y) = \frac{\tan(x-y)}{\cos(x-y)},$$

$$\partial_y f_5(x,y) = \frac{\tan(x-y)}{-\cos(x-y)},$$

$$\partial_x f_6(x,y,z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cos\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2},$$

$$\partial_y f_6(x,y,z) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cos\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2},$$
$$\partial_z f_6(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cos\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2}.$$

Exercice 35. Calculer $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}x^n$ et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}e}e^x$.

Exercice 36. Que peut-on dire du domaine de définition des dérivées partielles des fonctions f_1 et f_2 de l'exercice précédent, à savoir :

1. $f_1(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f_1(0,0) = 0$;
2. $f_2(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f_2(0,0) = 0$?

Calculer ces dérivées partielles là où elles existent. Ces fonctions sont-elles différentiables en $(0,0)$?

Indication. Bien se remémorer la définition d'une dérivée partielle en un point. Les dérivées partielles peuvent exister même si la fonction n'est pas continue ! Ne pas interpréter l'énoncé trop vite par habitude de l'analyse d'une seule variable et réfléchir avant de se lancer ! En-dehors de $(0,0)$, les dérivées partielles sont clairement définies et leur calcul ne doit pas être un problème. On peut utiliser les propriétés de symétrie de f_1 et f_2 pour aller plus vite. Si les fonctions sont différentiables, que valent leurs différentielles ? Une fois ces candidates établies et nommées, par exemple, L_1 et L_2, vérifier la différentiabilité, c'est étudier la convergence vers 0 de

$$\frac{f_i(0+h,0+k) - f_i(0,0) - L_i(h,k)}{\|(h,k)\|}$$

quand $(h,k) \to (0,0)$. Une question à se poser : dans l'expression ci-dessus, de quelle norme s'agit-il ?

Exercice 37 (cours)**.** Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in U$.

1. Rappeler la définition d'une application $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable en a.
2. Montrer que si $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable en a, alors f est continue en a.
3. Soit $g : U \to \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable en a. Expliquer pourquoi les coefficients du développement limité à l'ordre 1 de g en a sont les dérivées partielles de g en a.

Exercice 38. On définit dans le plan l'ensemble $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^6 + 3x^2y^2 + y^4 = 64\}$.

1. Montrer que Γ est un compact de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que Γ admet une droite tangente en $(2,0)$, dont on déterminera l'équation.
3. La courbe Γ admet-elle des tangentes horizontales ? verticales ?

Indication.

1. Comment montre-t-on qu'un tel ensemble est un fermé ? Pour montrer qu'il est borné, considérer la limite quand $\|(x,y)\| \to +\infty$ de $x^6 + 3x^2y^2 + y^4$.
2. Après avoir vérifié que $(2,0) \in \Gamma$, si l'on ne connait pas la formule générale pour la tangente à une telle courbe, on pourra se demander comment généraliser la formule donnant la tangente à une courbe Γ' d'équation $y = f(x)$ en un point $(a, f(a))$, qui est pour rappel la droite Δ' d'équation $f'(a)x - y = f'(a)a - f(a)$. Pour ce faire, on pourra voir Γ' comme la ligne de niveau 0 de la fonction $g(x,y) = f(x) - y$ puis trouver un vecteur normal à la droite Δ' ainsi qu'un point particulier de Δ' [2].
3. Découle naturellement des observations de la question précédente.

---

2. On peut trouver, exactement de la même manière, l'équation du plan tangent, quand il existe, à une surface d'équation $h(x,y,z) = 0$. On peut même pousser la généralisation en dimension n et obtenir l'équation de l'hyperplan tangent à une surface $h\left((x_i)_{1\leq i\leq n}\right) = 0$.

Exercice 39 (calculs : ∇f)**.** Calculer le gradient des fonctions suivantes (lorsqu'il est défini) :

$$f : (x,y) \mapsto x^2 = y\ln(x^2+1)$$

$$g : (x_1,...,x_n) \mapsto \prod_{i=1}^{n} x_i$$

$$h : (x_1,...,x_n) \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

Solution. On trouve

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2xy}{x^2+1} \\ \ln(x^2+1) \end{pmatrix} \qquad \nabla g(x_1,...,x_n) = \begin{pmatrix} x_2 \dots x_n \\ x_1 x_3 \dots x_n \\ \vdots \\ x_1 \dots x_{n-1} \end{pmatrix}$$

Enfin, g est dérivable partout sauf en 0 et on a

$$\nabla g(x_1,...,x_n) = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+...+x_n^2}} \\ \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+...+x_n^2}} \\ \vdots \\ \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+...+x_n^2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{||x||_2} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Exercice 40 (calculs : $\mathrm{Jac}(f)$)**.** Calculer la matrice jacobienne et le déterminant jacobien des applications suivantes, lorsque ces objets sont définis :

$$f : (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(y) \\ \sin(x) \end{pmatrix}.$$

$$g : (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} y^2+z^2 \\ x^2+z^2 \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}$$

$$h : (x_1,...,x_n) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1+x_2 \\ x_1+x_2+x_3 \\ \dots \\ x_1+x_2+\ldots+x_n \end{pmatrix}.$$

Solution. On rappelle que la matrice jacobienne d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est la matrice de taille $m \times n$ dont le coefficient (i,j) est $\partial f_i / \partial x_j$, et son jacobien est le déterminant de sa matrice jacobienne. Ici, on trouve

$$\mathrm{Jac}(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -\sin(y) \\ \cos(x) & 0 \end{pmatrix} \qquad |\mathrm{Jac}(f)(x,y)| = \sin(x)\cos(y)$$

$$\mathrm{Jac}(g)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 2y & 2z \\ 2x & 0 & 2z \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix} \qquad |\mathrm{Jac}(g)(x,y,z)| = 16xzy$$

$$\mathrm{Jac}(g)(x_1,...,x_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & 1 & \dots & & 1 \end{pmatrix} \qquad |\mathrm{Jac}(g)(x,y,z)| = 1$$

Exercice 41 (calculs : div, rot, dimension 2)**.** Calculer la divergence et le rotationnel des applications suivantes, lorsque ces objets sont définis :

$$f : (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$$

$$g : (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} xy \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}$$

$$h : (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(x+y) \\ \sin(x-y) \end{pmatrix}$$

Solution. On rappelle que les définitions de la divergence et du rotationnel se trouvent en 3.1.14 du polycopié de cours, page 25. Pour éviter de faire des erreurs, commencez simplement par calculer la matrice jacobienne de la fonction !

On a $\mathrm{div}(f) = \mathrm{rot}(f) = 0$ en tout point.

En $x = (x_1, x_2)$ on a $\mathrm{div}(g)(x) = 3x_2$ et $\mathrm{rot}(g)(x) = x_1$.

Enfin, $\mathrm{div}(h)(x) = -\sin(x_1+x_2) - \cos(x_1-x_2)$, et $\mathrm{rot}(h)(x) = \cos(x_1-x_2) - \sin(x_1-x_2)$.

Exercice 42 (calculs : rotationnel en dimension 3)**.** Calculer la divergence et le rotationnel des applications suivantes, lorsque ces objets sont définis :

$$f : (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$$

$$g : (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ x+y+z \\ xyz \end{pmatrix}$$

Solution. Pour se souvenir de la définition du rotationnel en dimension 3, on adopte souvent le moyen mnémotechnique [3] suivant :

$$\mathrm{rot} f(x) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

où $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ sont les vecteurs de la base canonique. Lorsqu'on développe ce déterminant, on obtient

$$\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right)\vec{e}_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right)\vec{e}_2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Ici, après calculs, on obtient que le rotationnel de f est partout nul. Pour l'application g, on obtient (avec $a = (x,y,z)$) :

$$\mathrm{rot} f(a) = \begin{pmatrix} xz-1 \\ -yz \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 43 (théorème de Rolle)**.** L'objectif de l'exercice est de généraliser le théorème de Rolle en plusieurs dimensions.

1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ une fonction dérivable. On suppose que $f(0) = f(1)$. Est-il vrai qu'il existe $\xi \in]0,1[$ tel que $f'(\xi) = 0$?
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que pour tout x tel que $||x|| = 1$, on a $f(x) = 0$. Montrer qu'il existe $x_0 \in B(0,1)$ tel que $\nabla f(x_0) = 0$.

3. Il faut bien comprendre que cela n'a pas vraiment de sens, on n'écrit pas une matrice avec à la fois des vecteurs, des symboles comme $\partial/\partial x_i$ et des fonctions...

Indication. Pour la première question, le contre-exemple $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ devrait faire l'affaire. Pour la deuxième, remarquer que f possède nécessairement un maximum ou un minimum dans $B(0,1)$.

Exercice 44 (Gâteaux-différentiabilité : $\star$)**.** Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et v un élément quelconque de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est Gâteaux-différentiable[4] en un point a de U suivant la direction v si la fonction

$$\frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

possède une limite finie lorsque t tend vers 0. Dans ce cas, cette limite est appelé *dérivée de f en a suivant v* et est notée $f'_v(a)$. On suppose dans la suite que f est dérivable en a suivant v.

1. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = f(a+tv)$. Que peut-on dire de φ ? À quoi correspondent les dérivées partielles de f si elles existent ?
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = y^2/x$ si $x \neq 0$ et $f(0,y) = y$, pour tout $y \in \mathbb{R}$. Montrer que f est dérivable au point $(0,0)$ suivant tout vecteur de $v \in \mathbb{R}^2$. Calculer $f'_v(0,0)$. L'application f est-elle différentiable en $(0,0)$?
3. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction. Supposons f différentiable en a. Montrer que, pour tout vecteur $v = (v_1, \ldots, v_n)$,
$$f'_v(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) v_i = \langle \nabla f(a), v \rangle.$$
4. Soit $\mathscr{S}(0,1) = \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\| = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ pour la norme euclidienne. Notons
$$M = \sup_{v \in \mathscr{S}(0,1)} f'_v(a).$$
Montrer que M est en fait un maximum atteint en un vecteur $v \in \mathscr{S}(0,1)$ que l'on peut expliciter et donner la valeur de M. Donner une interprétation géométrique.
5. Vous êtes sur une montagne dont la surface est donnée par l'équation
$$z = \max(-x^2 - y^2 + 1800, 0)$$
au point A de coordonnées $(20, 20, 1000)$. Quelle direction devez-vous choisir pour atteindre le sommet au plus vite ?

Indication. Les premières questions découlent des définitions. Pour la troisième question, ne pas oublier le théorème de dérivation des fonctions composées (proposition 3.2.3 et remarque 3.2.4 du cours).

Pour la question 4, on pourra certainement revoir avec attention les résultats et les méthodes d'un certain exercice de la deuxième feuille d'exercices, sur la « norme triple » d'une application linéaire... Est-il possible de voir la fonction $v \mapsto f'_v(a)$ comme une application linéaire ? Dans ce cas, à quoi peut bien correspondre le nombre M ?

Enfin, l'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit un très bon indice sur la valeur de M et sur le vecteur v qui permet d'atteindre le maximum...

Pour la dernière question, ne pas se laisser embrouiller par le max, qui est complètement superflu au voisinage de A. Poser ensuite $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 1800$. Interpréter mathématiquement « atteindre le sommet au plus vite » comme « avoir la plus forte croissance en altitude possible dans l'immédiat »[5], tout en se rappelant que l'altitude est exactement $f(x,y)$ et que la croissance de f en $(20,20)$ dans une certaine direction $v = (v_1, v_2) \in \mathscr{S}(0,1)$ est précisément $f'_v(20,20)$.

4. Du nom de René Gâteaux, 1889-1914.

5. Un modélisateur attentif remarquera que cette approche est particulièrement naïve et peut aisément être mise en défaut, par exemple en cachant des crevasses sur le trajet de plus forte pente, ou encore en prenant en compte le fait que la vitesse du promeneur décroit quand le dénivelé augmente. Par ailleurs, insistons sur le fait que le gradient ne pointe pas a priori vers le maximum de la fonction.

Exercice 45. Soit $\mathscr{C}$ un cyclindre de révolution de rayon de base $r(t)$ et de hauteur $h(t)$. On note $V(t)$ le volume de $\mathscr{C}$ à l'instant t.

1. Exprimer V en fonction de r et h.
2. Au moment t_0, le rayon de base de $\mathscr{C}$ vaut 20cm et croît à la vitesse de 1cm/s, et la hauteur du cyclindre est de 50cm et croît à a vitesse de 5cm/s. À quelle vitesse croît le volume de $\mathscr{C}$?

Indication. Il suffit de dériver la fonction $t \mapsto V(t)$ en t_0.

Exercice 46 (fonctions homogènes)**.** On dit d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ qu'elle est *homogène de degré* $s > 0$ si pour tout $\lambda > 0$ et tout x dans $\mathbb{R}^n$, on a

$$f(\lambda x) = \lambda^s f(x).$$

Soit $s > 0$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction homogène de degré s et de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Montrer que les dérivées partielles de f sont homogènes de degré $s-1$.
2. Montrer que f vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ l'équation suivante, appelée *équation d'Euler* :

$$sf(x) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x).$$

3. Montrer que la réciproque est également vraie (on pourra utiliser la fonction auxiliaire $\varphi : \lambda \mapsto \lambda^{-s} f(\lambda x)$) .
4. Généraliser les résultats des questions précédentes pour des fonctions de n variables.

Indication. Il faut utiliser au maximum l'égalité $f(\lambda x) = \lambda^s f(x)$. Que se passe-t-il si l'on prend la différentielle de chaque côté ? Pour la deuxième question, on remarquera qu'il est possible de dériver la fonction $\lambda \mapsto f(\lambda x)$...

Exercice 47 (changement de variables)**.** Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes en fonction de celles de h

$$f(x,y) = h(x-y, x+y), \qquad g(x,y) = h(x^2+y^2, xy).$$

Indication. Il faut utiliser la formule de dérivation des fonctions composées !

Exercice 48. Trouver toutes les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0.$$

Indication. Que dirait-on d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f' = 0$?

Exercice 49 (coordonnées polaires : $\star$)**.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On pose $\tilde{f}(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Exprimer les dérivées partielles de $\tilde{f}$ en fonction de celles de f, et vice-versa.

En règle générale, on note $\partial_r f$ et $\partial_\theta f$ les dérivées partielles de $\tilde{f}$ par rapport à r et θ, et on note $\partial_x f$ et $\partial_y f$ les dérivées partielles de f par rapport à x et y. Montrer que

$$(\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2 = (\partial_r f)^2 + \frac{1}{r^2}(\partial_\theta f)^2.$$

Indication. Il suffit d'appliquer encore la formule de dérivation en chaîne ! La deuxième question est beaucoup plus facile, il suffit de développer le résultat de la première.

Exercice 50 (une équation en coordonnées polaires)**.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant l'équation suivante :

$$x\partial_y f(x,y) - y\partial_x f(x,y) = \kappa f(x,y) \tag{E}$$

où κ est une constante positive. On pose $\tilde{f}(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Quelle équation vérifie la fonction $\tilde{f}$?

Solution. Il suffit d'appliquer les formules habituelles qui relient les dérivées en coordonnées polaires et les dérivées en coordonnées (x,y), obtenues à l'exercice précédent. On obtient que $\tilde{f}$ vérifie l'équation

$$\partial_\theta \tilde{f}(r,\theta) = \kappa f(r,\theta)$$

ce qui s'écrit aussi, avec les notations de l'exercice précédent, $\partial_\theta f = \kappa f$. Cette équation est facile à résoudre ! Pouvez-vous maintenant trouver les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ qui vérifient (E) ?

Exercice 51. Le point $M(t) = (c, y(t))$ est l'intersection de la demi-droite issue de 0 formant un angle t avec l'angle des abscisses, et de la droite d'équation $x = c$. Calculer la vitesse de M en fonction de t.

Exercice 52 (coordonnées polaires, II)**.** Sur un disque de centre 0 et de rayon R, la température du point dont les coordonnées polaires sont (r,θ) est donnée par

$$T(r,\theta) = T_1 + \frac{T_2}{1+r^2}.$$

Ursuline est sur le point $(0,x_0)$ et se déplace parallèlement à l'axe des abscisses à une vitesse constante égale à $v > 0$. À quelle vitesse varie la température ressentie par Ursuline ?

Exercice 53 (cours)**.** Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in U$. Une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est dite de classe $\mathscr{C}^1$ en a si ses dérivées partielles existent sur U et sont continues en a. Montrer qu'une application $\mathscr{C}^1$ en a est différentiable en a. La réciproque est-elle vraie ?

Indication. Il faut toujours avoir un contre-exemple en tête pour ce genre de question. On peut construire un tel contre-exemple en repartant de la question similaire à une seule variable : trouver une fonction dérivable non-$\mathscr{C}^1$... comme dans l'exercice 1.

Exercice 54. Soit $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $h(x,y,z) = (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} + e^{2z}, x - y)$. Montrer que h est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme entre deux ouverts $U \subset \mathbb{R}^3$ et $V \subset \mathbb{R}^3$ que l'on déterminera. Expliciter la matrice jacobienne associée.

Indication. U et V ne sont pas uniques, on peut construire deux paires distinctes (U_1,V_1) et (U_2,V_2). Pour chacune de ces deux paires, on peut déterminer explicitement l'inverse de h. C'est exactement montrer que h (restreinte au départ à U_i et à l'arrivée à V_i) est bijective. Pour ensuite répondre entièrement à l'exercice, il ne reste qu'une vérification routinière à faire.

Poser $h(x,y,z) = (u,v,w)$ et calculer $v - u$ en fonction de w et y. En déduire l'expression de y en fonction de (u,v,w) (attention, c'est ici qu'il faut préciser les ouverts !) puis en déduire la suite de l'inversion.

Exercice 55. Soit $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ une matrice. À quelles conditions l'application $x \in \mathbb{R}^n \mapsto Ax \in \mathbb{R}^m$ est-elle un difféomorphisme ?

Exercice 56 (coordonnées polaires, III)**.** Pour tout $r > 0$ et $\theta \in]-\pi,\pi[$, on pose

$$\varphi(r,\theta) = \big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big).$$

Montrer que φ est un difféomorphisme sur son image, que l'on déterminera. Calculer sa matrice jacobienne et calculer φ^{-1}.

Exercice 57. On pose $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \in \Omega \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est différentiable sur Ω et calculer sa différentielle.
2. Montrer que f est différentiable en $(0,0)$ et que sa différentielle est nulle.
3. Montrer que f admet en tout point des dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, et calculer la valeur de ces dérivées en $(0,0)$. Que peut-on en déduire pour la continuité de ces dérivées partielles secondes en $(0,0)$?

Indication.
1. Différentiabilité triviale. Les dérivées partielles sont (sans préciser, volontairement, laquelle est laquelle) :
$$\frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{-x(y^4+4x^2y^2-x^4)}{(x^2+y^2)^2}$$
2. Calculer les dérivées partielles par la définition, utiliser la définition de la différentiabilité et conclure le calcul par équivalence des normes. La question est posée de manière piégeuse : on détermine en fait un candidat pour la différentielle *avant* de montrer que la fonction est différentiable, comme toujours d'ailleurs.
3. Sur Ω, c'est encore une fois trivial (on ne demande pas de les calculer sur Ω, inutile de s'embarquer dans des calculs superflus !). Le calcul des dérivées partielles secondes croisées en $(0,0)$ se fait comme précédemment. On conclut à l'aide d'un théorème du cours sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^2$.

Exercice 58 (cours)**.** Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable, dont la différentielle est nulle en tout point. Est-il vrai que f est constante ?

Indication. $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x < 0$, $f(x) = 1$ si $x > 0$.

Exercice 59 (convexité)**.** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application convexe.

1. Soient $a < b < c$ des points de I. Montrer (éventuellement à l'aide d'un dessin) que
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$
Ce résultat s'appelle le *lemme des trois cordes*.
2. Soit x_0 un point de I. Pour tout $x \neq x_0$, on pose
$$\varphi_{x_0} : x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$
Montrer que φ_{x_0} est croissante sur son domaine de définition.
3. En déduire que f admet une dérivée à gauche et à droite en tout point de l'intérieur de I.
4. Les fonctions convexes sont-elles dérivables ?

Indication. Il faut faire des dessins : le lemme des trois cordes est presque évident sur le graphe de la fonction f !

La conclusion de cet exercice important est que les fonctions convexes définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ sont *nécessairement continues*, et qu'elles sont même dérivables à droite et à gauche en tout point. Cependant, on gardera en mémoire le fait que la fonction valeur absolue est convexe, mais n'est pas dérivable.

Exercice 60 (Convexité, II : $\star$)**.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application convexe, $n \geq 2$. On note $(e_i)_{i \leqslant n}$ la base canonique.

1. Soient a et v deux éléments quelconques de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $t \mapsto f(a+tv)$ admet une dérivée à droite et à gauche en 0.
2. Soit $u \in \mathbb{R}^n$ un vecteur à coordonnées positives tel que $||u||_1 = 1$.
   (a) Montrer par récurrence que
   $$f(u) \leq \sum_{i=1}^{n} u_i f(e_i).$$
   (b) En déduire que f est bornée sur la sphère unité pour la norme $\|\cdot\|_1$.
3. Soit $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|u\|_1 = 1$. Soit $\varphi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
   $$\varphi(t) = f(tu) - f(0).$$
   Montrer que φ est convexe. En déduire qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$ de norme $\|u\|_1 = 1$,
   $$-\lambda M \leq f(\lambda u) - f(0) \leq M\lambda \quad \forall \lambda \in [-1,1].$$
4. En déduire que les fonctions convexes sur $\mathbb{R}^n$ sont continues.

Indication.
1. On est ramené à une fonction convexe de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
2. On peut généraliser sans difficultés l'inégalité pour les barycentres aux fonctions convexes de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Puis on voit u comme un barycentre de la famille $(0, e_1, e_2, \ldots, e_n)$.
   On peut ensuite répéter le procédé pour chacune des 2^n familles $(0, \varepsilon_1 e_1, \ldots, \varepsilon_n e_n)$ avec $(\varepsilon_i)_{1\leq i\leq n} \in \{-1,1\}^n$ et obtenir ainsi la borne sur la sphère unité pour la norme 1.
3. La convexité de ϕ est aisément démontrée. On peut ensuite appliquer les résultats sur les fonctions convexes réelles à celle-ci tout en remarquant que $\phi(0) = 0$.
4. Pour obtenir la convexité sur tout $\mathbb{R}^n$, on peut translater l'origine en posant $f_a(u) = f(u+a)$.

Exercice 61 (Convexité, III : $\star$)**.** Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continue telle que pour tous points x, y dans $\mathbb{R}^n$, on a
$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$
Montrer que f est convexe.

Indication. Quelle est la différence avec la définition de la convexité ? On aimerait démontrer que
$$f(tx+(1-t)y) \leqslant tf(x)+(1-t)f(y) \tag{2}$$
pour tous les t dans $[0,1]$, mais ici on sait uniquement que cette inégalité est vraie lorsque $t = 1/2$. En reprenant astucieusement la même inégalité plusieurs fois, on peut démontrer qu'en fait (2) est vraie lorsque $t = 1/4$ ou $t = 3/4$, puis $t = 1/8, 3/8, 5/8, 7/8$, et ainsi de suite... Où interviendra la continuité ?

Exercice 62 (Difficile : $\star\star$)**.** Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction vérifiant
$$F(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \begin{pmatrix} r\cos(f(\theta)) \\ r\sin(f(\theta)) \end{pmatrix}$$
pour tout $r \geqslant 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique.

À quelle condition sur f la fonction F est-elle différentiable en 0 ?

Exercice 63. Soit A une matrice de taille $n \times n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on pose
$$q(x) = \langle x, Ax \rangle.$$
Montrer que q est $\mathscr{C}^\infty$ et calculer son gradient et sa matrice hessienne.

Indication. On remarquera que $q(x+h) = q(x) + q(h) + \langle x, Ah\rangle + \langle h, Ax\rangle$. Que dire de la fonction $h \mapsto \langle x, Ah\rangle + \langle h, Ax\rangle$?

Exercice 64 (formules « div grad rot »)**.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. Calculer $\mathrm{rot}\big(\nabla f\big)$ et $\mathrm{div}\big(\nabla f\big)$ lorsque $n = 2$ puis $n = 3$.

Solution. On trouve la formule classique $\mathrm{rot}(\nabla) = 0$, aussi appelée « rot grad = 0 », et l'autre formule classique $\mathrm{div}(\nabla) = \Delta$ où Δ est l'opérateur laplacien, à savoir $\Delta f = \sum_{i=1}^n \partial^2 f/\partial x_i^2$.

Exercice 65 (variables séparées)**.** Soient X, Y, Z trois fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. On pose $F(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$. Vérifier le théorème de Schwarz pour la fonction F.

Exercice 66 (variables séparées, II)**.** Soient X, Y, Z trois fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une autre fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On pose $G(x,y,z) = f\big(X(x)Y(y)Z(z)\big)$. Vérifier le théorème de Schwarz pour la fonction G.

Exercice 67 ($\star$)**.** Soit (c_n) une suite réelle bornée. On pose

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n y^n.$$

1. Montrer que son domaine de définition contient la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 pour la norme $||\cdot||_\infty$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, puis calculer son gradient et sa matrice hessienne.

Indication. Pour la deuxième question, il faudra peut-être utiliser les résultats du cours d'analyse réelle sur les fonctions analytiques (2M260 ou 2M261, par exemple).

Solution. Première question : supposons que $|c_n| \leqslant M$ pour tout n. Si $||(x,y)||_\infty < 1$ cela veut dire que $|x| < 1$ et $|y| < 1$. En particulier, $|xy| < 1$ et on a donc

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n y^n \right| \leqslant M \sum_{n \geqslant 0} |xy|^n < \infty.$$

La série est donc absolument convergente sur la boule unité pour $||\cdot||_\infty$, elle est donc convergente, et f est bien définie.

Deuxième question : on remarque que f est la composée d'une fonction entière et du produit $(x,y) \mapsto xy$. Plus précisément, si $s(t) = \sum_{n\geqslant 0} c_n t^n$ est la série entière associée aux c_n, cette série est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son disque de convergence, lequel contient $]-1,1[$. D'autre part, si l'on pose $p(x,y) = xy$, la fonction f est aussi $\mathscr{C}^\infty$ et il est clair que si $||(x,y)||_\infty < 1$ alors $p(x,y) \in]-1,1[$, donc la composée $s \circ p$ a bien un sens et elle est égale à f sur $B(0,1)$. Par composition, f est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $B(0,1)$.

On sait que la dérivée de s est donnée par $s'(t) = \sum_{n\geqslant 0}(n+1)c_{n+1}t^n$. On a $\nabla f(x,y) = s'\big(p(x,y)\big) \cdot \nabla p(x,y)$, soit

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \sum_{n\geqslant 0}(n+1)c_{n+1}x^n y^{n+1} \\ \sum_{n\geqslant 0}(n+1)c_{n+1}y^n x^{n+1} \end{pmatrix}$$

Exercice 68 (un théorème de Kolmogorov : $\star\star$)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que $f(x)$ et $f''(x)$ tendent vers 0 lorsque $x \to \pm\infty$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Écrire la formule de Taylor à l'ordre 2 pour $f(x+1)$ et $f(x+2)$.
2. Exprimer $f'(x)$ en fonction de f et f''. En déduire que $f'(x) \to 0$ lorsque $x \to \pm\infty$.
3. Plus généralement, montrer que si f' est bornée par α et f'' est bornée par β, alors f' est bornée par $\sqrt{2\alpha\beta}$.

Indication. Pour la deuxième question, on pourra penser à exprimer le vecteur $(f(x+1), f(x+2))$ en fonction du vecteur $(f(x), f'(x))$, puis inverser une certaine matrice...

Exercice 69 (jacobienne antisymétrique : $\star$)**.** On note A^* la transposée d'une matrice A. On dit qu'une matrice est antisymétrique lorsque $A^* = -A$.

1. Que dire des termes diagonaux d'une matrice antisymétrique ?
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ dont la matrice jacobienne est antisymétrique. Montrer que
$$f(x,y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b$$
où A est une matrice antisymétrique et b un élément de $\mathbb{R}^2$.
3. Généraliser le résultat précédent à toutes les dimensions.

Exercice 70 (fonctions harmoniques)**.** Le *laplacien* de f est $\Delta f = \sum_{i=1}^n \partial^2 f/\partial x_i^2$. Une fonction deux fois dérivable dont le laplacien est nul est dite *harmonique*. Les fonctions suivantes sont-elles harmoniques ?

$$f : (x,y) \mapsto x^3 - xy + y^2 \qquad g : (x,y) \mapsto \cos(xy).$$
$$h : (x,y) \mapsto e^{x-y} \qquad \ell : (x,y) \mapsto \arctan(x^2).$$
$$m : (x,y) \mapsto \ln(x^2+y^2) \qquad n : (x,y) = e^{x^2-y^2}\sin(2xy).$$

Solution. Seules les deux dernières sont harmoniques.

Exercice 71. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction harmonique de classe $\mathscr{C}^\infty$. Montrer que la fonction
$$\phi : (x,y) \mapsto y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$
est encore harmonique.

Exercice 72. On pose $r(x,y,z) = ||x||$. Montrer que $1/r$ est harmonique sur son domaine de définition.

Exercice 73 (laplacien en polaires)**.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On pose $g(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Vérifier la formule suivante :
$$\Delta f = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}.$$

Exercice 74 (Frenet, exercice 98)**.** Quel est le rayon du cercle dans lequel, à un arc de longueur donnée, correspond le segment de longueur maximale ?

Exercice 75. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive. A-t-elle nécessairement un extremum ? Et si $\lim_{||x||\to\infty} f(x) = +\infty$?

Exercice 76. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction qui a un unique minimum. La fonction f^2 admet-elle un minimum ? Est-il unique ?

Exercice 77. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction telle que f^2 admet un unique minimum. La fonction f admet-elle un minimum ? Est-il unique ?

Exercice 78. Soient f, g deux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui admettent un unique minimum. La fonction fg admet-elle un minimum ? Est-il unique ?

Exercice 79. Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polynôme réel qui a une infinité d'extremums locaux sur $\mathbb{R}$. Que dire de P ?

Exercice 80 ($\star$)**.** Soit $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un polynôme. Peut-il avoir une infinité de racines ? Et une infinité d'extremums locaux ?

Exercice 81 ($\star$)**.** Soit $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un polynôme. Peut-il s'annuler sur un ouvert ?

Solution. Soit P un polynôme qui s'annule sur un ouvert, alors il existe un ensemble de la forme $]a,b[\times]a',b'[$ sur lequel P est nul. On a $P(x,y) = 0$ pour tout $x \in]a,b[$ et tout $y \in]a',b'[$. Pour tout $x \in]a,b[$, la fonction $y \to P(x,y)$ est un polynôme en une variable et a une infinité de racines, donc il est nul. On en déduit que $P(x,\cdot)$ est nul pour tout $x \in]a,b[$. Maintenant, pour tout $y \in \mathbb{R}$, le polynôme $x \mapsto P(x,y)$ a une infinité de racines car il s'annule sur $]a,b[$. Il est donc nul. On en déduit que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $P(\cdot,y) = 0$ ce qui veut bien dire que P est nul.

On en déduit qu'un polynôme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui s'annule sur un ouvert est identiquement nul. La même démonstration vaut dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 82. Écrire le développement limité à l'ordre 2 des fonctions f au point (x_0,y_0) et déterminer si le point est un point critique et, si oui, s'il s'agit d'un minimum local, d'un maximum local ou d'un point selle :

1. $f(x,y) = \sin(x+2y),\ (x_0,y_0) = (0,0)$;
2. $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2+1},\ (x_0,y_0) = (0,0)$;
3. $f(x,y) = e^{(x-1)^2}\cos y,\ (x_0,y_0) = (1,0)$.

Solution. Les solutions sont :

1. $Df(x,y) = \begin{pmatrix}\cos(x+2y) & 2\cos(x+2y)\end{pmatrix}$, $D^2f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x+2y) & -2\sin(x+2y) \\ -2\sin(x+2y) & -4\sin(x+2y)\end{pmatrix}$.
2. $Df(x,y) = \begin{pmatrix}-\frac{2x}{(x^2+y^2+1)^2} & -\frac{2y}{(x^2+y^2+1)^2}\end{pmatrix}$, $D^2f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{8x^2-2(x^2+y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^3} & \frac{8xy}{(x^2+y^2+1)^3} \\ \frac{8xy}{(x^2+y^2+1)^3} & \frac{8y^2-2(x^2+y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^3}\end{pmatrix}$.
3. $Df(x,y) = \begin{pmatrix}2(x-1)e^{(x-1)^2}\cos y & -e^{(x-1)^2}\sin y\end{pmatrix}$,
$$D^2f(x,y) = \begin{pmatrix} 2e^{(x-1)^2}\cos y(1+2(x-1)^2) & -2e^{(x-1)^2}(x-1)\sin y \\ -2e^{(x-1)^2}(x-1)\sin y & -e^{(x-1)^2}\cos y\end{pmatrix}.$$

Exercice 83 ($\star$)**.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application convexe différentiable dont toutes les dérivées partielles en un point a sont nulles. Montrer que a est un minimum pour f.

Indication. On pourra s'aider des exercices autour de la convexité dans la précédente feuille de TD. Le cas $n = 1$ est facile. Le cas $n \geq 2$ peut se faire en posant $\phi_v : t \mapsto f(a+tv)$ pour $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|v\|_1 = 1$ et en se ramenant au cas $n = 1$.

Attention, on ne sait pas que la dérivée de f en a suivant v est nulle, on sait que les n dérivées partielles de f en a le sont ; c'est différent ! Mais en utilisant finement le fait que $\|v\|_1 = 1$, on va pouvoir en fait montrer bel et bien que la dérivée de f en a suivant v est nulle.

Exercice 84. Trouvez les points critiques des fonctions suivantes et déterminez si ce sont des minima locaux, des maxima locaux ou des points selle :

1. $f(x,y) = x^3+6x^2+3y^2-12xy+9x$;
2. $f(x,y) = \sin x + y^2 - 2y + 1$;
3. $f(x,y,z) = \cos 2x \cdot \sin y + z^2$;
4. $f(x,y,z) = (x+y+z)^2$.

Solution. On a :

1. $Df(x,y) = 3\begin{pmatrix}x^2+4x-4y+3 & 2y-4x\end{pmatrix}$, $D^2f(x,y) = 6\begin{pmatrix}x+2 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.
2. $Df(x,y) = \begin{pmatrix}\cos x & 2y-2\end{pmatrix}$, $D^2f(x,y) = \begin{pmatrix}-\sin x & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.
3. $Df(x,y,z) = \begin{pmatrix}-2\sin(2x)\sin y & \cos(2x)\cos y & 2z\end{pmatrix}$
$$D^2f(x,y,z) = \begin{pmatrix}-4\cos(2x)\sin y & -2\sin(2x)\cos y & 0\\ -2\sin(2x)\cos y & -\cos(2x)\sin y & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$
4. $Df(x,y,z) = 2(x+y+z)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $D^2f(x,y,z) = 2\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Exercice 85 ($\star$)**.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que pour tout x tel que $||x|| > 1$, on a $\langle x, \nabla f(x)\rangle \geqslant 0$.

1. Montrer que f possède un minimum sur la boule unité fermée $\bar{B}(0,1)$.
2. Montrer que f possède un minimum global.

Indication. La première question est triviale car f est continue et $\bar{B}(0,1)$ compacte. Maintenant, supposons que x n'est pas dans $\bar{B}(0,1)$: alors $||x|| > 1$. Posons $\tilde{x} = x/||x||$. La fonction $\phi : t \mapsto f(t\tilde{x})$ est dérivable (pourquoi ?). Il serait tout à fait judicieux de montrer que $\phi(||x||) \geqslant \phi(1)$...

Solution. On pose $F = \bar{B}(0,1)$. Comme f est continue sur F qui est compact, f admet un minimum sur F, disons m : pour tout $x \in F$, $f(x) \geqslant m$. Soit maintenant $x \notin F$, c'est-à-dire $||x|| > 1$. On pose $\tilde{x} = x/||x||$ et $\phi(t) = f(t\tilde{x})$. Il est clair que ϕ est $\mathscr{C}^1$ comme composée de fonctions $\mathscr{C}^1$ et on a $\phi(1) = f(\tilde{x})$ et $\phi(||x||) = f(x)$. Le théorème de dérivation des fonctions composées donne
$$\phi'(t) = \langle \nabla f(t\tilde{x}), \tilde{x}\rangle = t^{-1}\langle \nabla f(t\tilde{x}), t\tilde{x}\rangle$$
et lorsque $t > 1$, on a $||t\tilde{x}|| = t||\tilde{x}|| = t > 1$. Par hypothèse, on a donc $\phi'(t) \geqslant 0$. La fonction ϕ est donc croissante sur $[1, \infty[$ et on en déduit que $f(x) \geqslant f(\tilde{x})$. Mais comme $\tilde{x} \in F$ on a aussi $f(\tilde{x}) \geqslant m$ et par conséquent $f(x) \geqslant m$.

Exercice 86. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2)$.

1. Étudier les extrema locaux de f.
2. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$. Montrer que f admet un maximum M et un minimum m sur D.
3. Soit $(x,y) \in D$. Montrer que si $f(x,y) = M$ ou $f(x,y) = m$, alors $x^2+y^2 = 1$.
4. Étudier la fonction $t \mapsto f(\cos t, \sin t)$. En déduire les valeurs de M et m.

Indication.
1. $\nabla f(x,y) = 3\begin{pmatrix}x^2 - (1+y^2)\\ -2xy\end{pmatrix}$ et $D^2f(x,y) = 6\begin{pmatrix}x & -y\\ -y & -x\end{pmatrix}$.
2. Que peut-on dire de l'ensemble D ?
3. « Simple » [6] déduction de la question 1. Bien comprendre ce qu'il se passe !
4. Étude de fonction réelle, certes un peu difficile. Penser aux astuces usuelles (isoler le terme dans la dérivée dont le signe est inconnu, etc.). On rappelle que
$$\cos(t)^2 - \sin(t)^2 = 2\cos(t)^2 - 1 = \cos(2t).$$

Exercice 87. Jean-Aristide et Jean-Clotaire se promènent sur le plan $\mathscr{P}$ de $\mathbb{R}^3$ dont l'équation est $\{2x - y + z = 16\}$. Jean-Aristide mesure les distances avec la norme $||\cdot||_2$ tandis que Jean-Clotaire mesure les distances avec la norme $||\cdot||_3$. Trouver le point de $\mathscr{P}$ qui est le plus proche de l'origine pour Jean-Aristide, et trouver le point de $\mathscr{P}$ qui est le plus proche de l'origine pour Jean-Clotaire.

6. et très classique !

Exercice 88. Soit $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$. Montrer que f admet au plus un extremum. Écrire $f(x,y) + 9$ comme la somme de deux carrés et en déduire que f admet -9 comme valeur minimale.

Indication. Écrire $f(x,y)+9$ comme la somme de 2 carrés se fait par la fameuse « forme canonique ». Attention, il ne peut pas s'agir de la somme d'un carré n'impliquant que x et d'un autre carré n'impliquant que y à cause du terme xy. Il s'agit donc de d'abord « avaler » tous les termes dépendant d'une des deux variables y compris ce xy, ce qui créera nécessairement des termes dans l'autre variable, puis de transformer le reste en un carré de la seule variable restante.

On peut par exemple chercher une expression de la forme $(\alpha x + \beta y + \gamma)^2 + (\delta y + \omega)^2$.

On peut ensuite calculer explicitement et très facilement les coordonnées du point où est atteint le minimum !

Exercice 89. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 - xy^2$.

1. Montrer que $(0,0)$ est le seul point critique de f.
2. Montrer que $(0,0)$ n'est pas un extremum local mais que pourtant la restriction de f à toute droite passant par $(0,0)$ admet en ce point un minimum local.

Indication. $x \mapsto x^2(1-\alpha^2 x)$ est équivalente au voisinage de 0 à x^2.

Pour montrer que $(0,0)$ n'est pas un extremum local de f, il faut trouver un « chemin » $y = g(x)$ tel que $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ soit continue, satisfasse $g(0) = 0$, et tel que $f(x, g(x))$ n'admette pas un minimum en 0. Chercher un g polynomial afin de pouvoir mettre à profit ce qu'on sait sur les polynômes au voisinage de 0.

Exercice 90. Justifier l'existence du maximum suivant, puis le calculer :

$$\sup_{(x,y)\in[0,\pi/2]^2} \{\sin(x)\sin(y)\sin(x+y)\}.$$

Indication. Séparer l'étude à l'intérieur du domaine et sur le bord du domaine. Au bord, cela revient à étudier une fonction à une variable... Quant à l'intérieur, il se traite avec les outils du cours.

Exercice 91. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$, telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$\varphi(x,y) = f(x)f(y).$$

La fonction φ admet-elle un extremum local en 0 ?

Solution. Non.

Exercice 92 (principe du maximum : $\star$)**.** On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est harmonique lorsqu'elle est de classe $\mathscr{C}^2$ et que son laplacien est nul [7]. Soit $\bar{B}_r$ la boule fermée de centre 0 et de rayon r et f une fonction harmonique.

1. Montrer que f possède un maximum sur $\bar{B}_r$.
2. Pour tout $t > 0$, on pose $f_t(x) = f(x) + t||x||^2$.
   (a) Calculer $D^2 f_t(x)$.
   (b) Montrer que f_t atteint son maximum uniquement sur le bord de $\bar{B}_r$, c'est-à-dire sur $\mathscr{S}(0,r) = \{x : ||x|| = r\}$.
3. En déduire que f atteint son maximum sur le bord de $\bar{B}_r$:

$$\sup_{\partial \bar{B}_r} f(x) = \sup_{\bar{B}_r} f(x).$$

7. Voir aussi les exercices du début de la feuille.

4. Plus généralement, soit U un ouvert connexe borné de $\mathbb{R}^n$ et $f : \bar{U} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, de classe $\mathscr{C}^2$ sur U et harmonique. Montrer que

$$\sup_{x\in\partial U} f(x) = \sup_{x\in\bar{U}} f(x).$$

Indication. La trace de la matrice hessienne est égale au laplacien... mais elle est aussi égale à la somme des valeurs propres. Or, un théorème du cours relie l'existence des extremums de f au signe des valeurs propres de $D^2 f$...

Solution.

1. Elle est continue sur $\bar{B}_r$ qui est compact.
2. On a $D^2 f_t(x) = D^2 f(x) + 2t\mathrm{Id}$. Supposons que f_t atteigne son maximum dans $B(0,r)$. Il existe alors $a \in B(0,r)$ tel que $f_t(a) = \sup f_t(x)$ où le sup est pris sur tous les $x \in \bar{B}_r$. Les conditions du deuxième ordre (théorème 3.5.6 page 36 du poly de cours) entraînent que les valeurs propres de $D^2 f_t(a)$ sont négatives ou nulles, donc $\mathrm{trace}(D^2 f_t(a)) \leqslant 0$. Or, $\mathrm{trace} D^2 f_t(a) = \mathrm{trace} D^2 f(a) + 4t = \Delta f(a) + 4t$. Comme f est harmonique on a donc $\mathrm{trace} D^2 f_t(a) = 4t > 0$ ce qui est strictement positif et contredit $\mathrm{trace}(D^2 f_t(a)) \leqslant 0$. On en déduit que f_t ne peut pas avoir de maximum local dans $B(0,r)$.
3. Le maximum est donc atteint sur le bord : il existe $x_t \in \mathscr{S}(0,r)$ tel que $\forall x \in \bar{B}_r$, $f_t(x) \leqslant f_t(x_t)$, ce qui se récrit

$$\forall x \in \bar{B}_r, \qquad f(x) + t||x||^2 \leqslant f(x_t) + t||x_t||^2 \leqslant \sup_{y\in\partial\bar{B}_r} f(y) + tr^2$$

car $||x_t|| = r$. En faisant tendre t vers 0, on obtient que pour tout $x \in \bar{B}_r$, on a $f(x) \leqslant \sup_{y\in\partial\bar{B}_r} f(y)$ ce qui démontre le résultat.
4. Il suffit de refaire la même démonstration en remplaçant $B(0,r)$ par U. Noter que si U est borné, $\bar{U}$ est compact.

Exercice 93 (applications du principe du maximum)**.** Dans cet exercice, on utilise le résultat de l'exercice précédent.

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique. Que dire de f si elle s'annule sur $\{x : ||x|| = r\}$ pour un certain $r > 0$?
2. On note $\mathscr{S}(0,1) = \{x : ||x|| = 1\}$. Soit $u : \mathscr{S}(0,1) \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère le problème suivant (problème de Dirichlet) : trouver une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ telle que

$$\begin{cases} \Delta f(x) = 0 & \forall x \in B(0,1) \\ f(x) = u(x) & \forall x \in \mathscr{S}(0,1). \end{cases}$$

Peut-il admettre plusieurs solutions ?

Solution. Si une fonction harmonique s'annule sur le bord d'un ouvert borné, par le principe du maximum son maximum sur ce ouvert est égal à 0 et son minimum aussi, donc cette fonction est nulle.

S'il y a deux solutions f, g au problème de Dirichlet, leur différence $f-g$ est une fonction harmonique valant $u-u=0$ sur le bord de $B(0,1)$, donc d'après la première question on a $f-g=0$ et $f=g$.

Exercice 94 (méthode des moindres carrés)**.** Soient $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$ des points de $\mathbb{R}^n$. On suppose que les x_i sont tous distincts. On cherche les nombres réels a,b tels que la droite affine d'équation $y = ax+b$ s'écarte le moins possible des points (x_i,y_i). On cherche pour cela à minimiser les carrés des erreurs : autrement dit, on veut minimiser la fonction

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2.$$

Montrer que la fonction S possède un minimum (global) et identifier ce minimum.

Exercice 95 (inversion locale en dimension 1)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que si $f'(x) \neq 0$, alors il existe un intervalle ouvert I contenant x et un intervalle ouvert J contenant $f(x)$ tels que f est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de I dans J.

Exercice 96 (un contre-exemple). On pose $f(x,y) = e^x(\cos(y), \sin(y))$ est un difféomorphisme local en tout point de $\mathbb{R}^2$. Est-ce un difféomorphisme global ?

Solution. On vérifie que la matrice jacobienne de f est inversible en tout point (le jacobien est égal à e^x), donc d'après le théorème d'inversion locale (théorème 3.3.5 page 31) l'application f est un difféomorphisme local, mais elle n'est pas injective ! Ce n'est donc pas un difféomorphisme global.

Exercice 97 (coordonnées sphériques). Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$F(x,y,z) = \big(x\sin(y)\cos(z), r\sin(y)\sin(z), r\cos(y)\big).$$

L'application f est-elle un difféomorphisme local ? global ?

Exercice 98 ($\star$). On considère une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que si $|||Df(a)||| < r$ pour un certain $r \in [0,1[$, alors f possède un unique point fixe dans $\mathbb{R}^n$. En déduire que la fonction

$$f_\varepsilon : (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} 3+\varepsilon e^{-x^2} \\ 2+\varepsilon \arctan(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

possède un unique point fixe lorsque ε est suffisamment petit.

Indication. Quel théorème parle de point fixe ? Quel théorème parle de norme de la matrice jacobienne ? Y a-t-il un moyen de relier les deux ?

Exercice 99 (perturbations de l'identité : $\star\star$). Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que pour tout x, on ait $|f'(x)| \leqslant q$ où q est un nombre constant avec $0 \leqslant q < 1$. On pose

$$f(x,y) = (x+f(y), y+f(x)).$$

Montrer que f est un $\mathscr{C}$-1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Indication. On pourra commencer par montrer que f est un difféomorphisme local, puis montrer qu'elle est injective, puis montrer qu'elle est surjective. L'utilisation de certains théorèmes *importants* est conseillée.

Exercice 100 (une équation différentielle : $\star\star$). Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ et soit $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}^2$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, bornée, telle que pour tout $t > 0$, on ait

$$f'(t) = \nabla\varphi\big(f(t)\big).$$

1. On pose $\gamma(t) = \varphi \circ f(t)$. Montrer que γ possède une limité finie en $+\infty$.
2. Montrer que $f'(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$.

Guido Fubini, 1879 - 1943.

Exercice 101. Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \left(\int_0^y x^2 \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

$$I_2 = \int_0^{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^x -\sin(x^2)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x,$$

$$I_3 = \int_0^1 \left(\int_{1-x}^{1+x} (2x+3y^2)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x,$$

$$I_4 = \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-z^2}} 2z\sin(y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y.$$

Solution. Les résultats sont (dans le désordre) $\frac{1}{12}$, $\frac{16}{3}(1-\cos(1))$, -1, $\frac{29}{6}$.

Exercice 102. En utilisant le théorème de Fubini, calculer

$$\iint_D 2xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le \sqrt{x}\},$$

$$\iint_D e^{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le y \le 2,\ y \le x \le 2y^3\}.$$

Solution. Les résultats sont (dans l'ordre) $\frac{1}{6}$ et $\frac{e(-6-e+e^7)}{4}$.

Exercice 103. Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_D \sin(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \pi^2 < x^2+y^2 \le 4\pi^2\}$$

$$I_2 = \int_D x^2+y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\right\} \text{ avec } a\,, b > 0$$

$$I_3 = \int_D z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \qquad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 1\,, 0 \le z \le h\}$$

Solution. Les résultats sont : $-6\pi^2$, $\frac{\pi ab(a^2+b^2)}{4}$, $\frac{\pi h^2}{2}$.

Exercice 104. Soient f, g deux fonctions continues, positives, bornées, intégrables sur $\mathbb{R}$. On pose

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t.$$

Montrer que la fonction $f * g$ est bien définie et intégrable. Calculer son intégrale.

Exercice 105. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 < y < 2x^2,\ 1/x < y < 2/x\}$.

1. Montrer que $(x,y) \mapsto (y/x^2, xy)$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de D sur $]1,2[^2$. Calculer le déterminant de sa matrice jacobienne.
2. Utiliser ce changement de variables pour calculer $\displaystyle\iint_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Indication. 1. On peut calculer directement l'inverse de $(x,y) \mapsto (\frac{y}{x^2}, xy)$.

2. On pose $\phi(u,v)=(x,y)$, $\phi:]1,2[^2\to D$, et on applique la formule de changement de variables du cours. Attention, c'est le jacobien de ϕ qui entre en jeu, pas le jacobien de la question 1 ! Il faut aboutir au résultat suivant : $\frac{3}{40}\left(10+12.2^{\frac{1}{3}}-11.2^{\frac{2}{3}}\right)$.

Exercice 106. Calculer les intégrales suivantes :

$$I=\int_1^2\int_1^2\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(xy+1)^2}$$

$$J=\int_0^1\int_0^1\int_0^1(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Solution. $I=\ln\left(\frac{10}{9}\right)$, $J=\frac{3}{2}$.

Exercice 107. Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x,y\geq 0,\, x+y\leq 1\}$. Montrer que

$$\iint_D\frac{xy}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\frac{1+\ln 2}{4}+\frac{\sqrt{3}}{12}\pi.$$

Indication. Surtout pas de coordonnées polaires ! Écrire directement le théorème de Fubini sous la forme :

$$\iint_D \mathrm{d}(x,y)=\int_0^1\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Exercice 108. Calculer l'aire de l'ellipse donnée par $\{x : x^2/a^2+y^2/b^2\leqslant 1\}$.

Solution. Un changement de variables donne le résultat : πab.

Exercice 109 (sport)**.** Calculer le volume d'un ballon de rubgy.

Solution. Un ballon de rugby est évidemment un ellipsoïde dont l'équation est la forme

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1.$$

Il faut appliquer le théorème de Fubini. Après calculs, on obtient que son aire est $\frac{4}{3}\pi abc$. D'après des mesures personnelles, un ballon de rugby est un ellipsoïde ayant pour paramètres $a=15, b=9, c=9$ (mesures en centimètres). Le volume du ballon de rugby est donc d'environ 5090 centimètres cubes.

Exercice 110. Calculer le volume d'un donut.

Exercice 111. La Terre est (approximativement) une sphère de rayon $r\sim 6371$ km. Calculer le volume de l'atmosphère, sachant qu'elle est haute d'environ 50km.

Exercice 112 ($\star$)**.** Soit $\bar{B}$ la boule de centre 0 et de rayon$r$. On choisit un quelconque point M sur le bord de $\bar{B}$. Quelle est la distance moyenne de ce point aux points de $\bar{B}$?

Indication. Si x est un point de la boule, la distance de x à M est $||x-M||$. On demande donc de calculer

$$\frac{1}{\mathrm{vol}(\bar{B})}\int_{\bar{B}}||x-M||\mathrm{d}x.$$

On remarquera déjà que l'on peut prendre sans perte de généralité $M=(0,0,1)$. Une bonne manière de calculer cette intégrale est de passer en coordonnées cylindriques. Cela nécessite quelques calculs brutaux ! Le résultat doit être $6r/5$.

Exercice 113 ($\star$)**.** Soit $P:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ un polynôme. Calculer

$$\int\int_{B(0,1)}|P(x+iy)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Indication. Pourquoi ne pas passer en coordonnées polaires ?

Exercice 114 (calcul de l'intégrale gaussienne : classique)**.** Calculer de deux manières différentes l'intégrale suivante

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

En déduire la valeur de l'intégrale suivante pour tout $a \neq 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2}\,\mathrm{d}t.$$

Indication. Pour la première question, on peut passer en coordonnées polaires, ou utiliser le théorème de Fubini. L'égalité ainsi obtenue permet de résoudre la deuxième question pour $a = 1$, puis un changement de variables permet de conclure. On trouvera une généralisation à l'exercice 122.

Exercice 115. Que vaut $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}}\mathrm{d}x$?

Exercice 116. Calculer l'intégrale suivante :

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

où $D = \{(x,y) : x,y \geq 0, x^2/4 + y^2/9 \leq 1\}$.

Solution. Passer en « coordonnées elliptiques » $(x,y) = (2r\cos\theta, 3r\sin\theta)$. On doit obtenir $\frac{9}{2}$.

Exercice 117. Pour chacun des cas suivants, vérifier que φ définit bien un C^1-difféomorphisme de $\tilde{D} = \varphi^{-1}(D)$ sur D en explicitant $\tilde{D}$, calculer le jacobien de φ et calculer l'intégrale en utilisant le changement de variables $(x,y) = \varphi(u,v)$:

1. $\varphi(u,v) = (\frac{1}{3}(u+v), \frac{1}{3}(v-2u))$; $I = \iint_D (3x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, où D est le domaine borné par les droites $y = x-2$, $y = x$, $y = -2x$ et $y = 3-2x$.
2. $\varphi(u,v) = (2u+3v, 3u-2v)$; $J = \iint_D (2x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, où D est le carré de sommets $(0,0)$, $(2,3)$, $(5,1)$, $(3,-2)$.
3. $\varphi(u,v) = (\frac{u}{v}, v)$; $K = -\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, où D est dans le premier quadrant et borné par les droites $y = x$, $y = 3x$ et les hyperboles $xy = 1$, $xy = 3$.

Solution. Les intégrales valent : $\frac{14}{3}$, $\frac{143}{2}$, $-2\ln(3)$.

Exercice 118 (Volumes)**.** Calculer le volume compris entre

1. la surface d'équation $z = x^2 + y^2$ et le plan $z = 4$,
2. les surfaces d'équation $z = x^2 + y^2 - 1$ et $z = 1 - x^2 - y^2$,
3. la surface d'équation $z = x^2 + 4y^2$ et le plan $z = 4$,
4. la surface d'équation $z^2 = x^2 + y^2$ et le plan $z = 1$.

Solution. Les réponses sont : 8π, π, 4π, $\frac{\pi}{3}$.

Exercice 119. Trouver le centre de gravité de la plaque homogène limitée par la parabole $y = 2x^2$ et la droite $y = 2$.

Indication. L'aire de cette plaque vaut $A = \frac{8}{3}$. Les coordonnées du centre de gravité G sont $(x_G, y_G) = (0, \frac{6}{5})$. *Remarque : par symétrie et sans aucun calcul, on peut obtenir que $x_G = 0$.*

Exercice 120 (cours : fonctions intégrables)**.**

1. (a) Rappeler la définition d'une fonction intégrable sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $t \mapsto 1/t^p$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $p > 1$.
   (c) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $C > 0$, $p > 1$ et $M > 0$ tels que
   $$|f(x)| \leq \frac{C}{|x|^p} \quad \forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq M.$$
   Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}$.
   (d) Montrer que $t \mapsto 1/|t|^p$ est intégrable sur $[-1, 1]\backslash\{0\}$ si et seulement si $p < 1$.
2. On considère maintenant l'application de $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par
   $$f(x) = \frac{1}{\|x\|^p}, \quad p > 0.$$
   (a) Soient R_1 et R_2 tels que $0 < R_1 < R_2$, et $D(R_1, R_2) = \{x \in \mathbb{R}^2 : R_1 \leq \|x\| \leq R_2\}$. Calculer $\displaystyle\int_{D(R_1,R_2)} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (b) En déduire que f est « intégrable » (en précisant quel sens on donne à cette intégrabilité) sur $\mathbb{R}^2 \setminus B(0, 1)$ si et seulement si $p > 2$.
   (c) Refaire l'exercice dans $\mathbb{R}^3$ et montrer que la condition d'intégrabilité est alors $p > 3$. Que dire de la dimension n ?

Indication. Pour la deuxième partie, il faut passer en polaires pour se ramener au cas 1D. L'intégrabilité donc il est ici question est naturellement définie ainsi : f est intégrable sur $\mathbb{R}^2\backslash B(0,1)$ si

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{D(1,R)} f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

(Cette limite existe dans tous les cas par positivité de f qui implique la monotonie de l'intégrale par rapport à R.) La limite précédente est alors appelée intégrale de f sur $\mathbb{R}^2\backslash B(0,1)$ et est notée $\int_{\mathbb{R}^2\backslash B(0,1)} f(x)\,\mathrm{d}x$. Pour la dernière question, on pourra passer en coordonnées sphériques.

Exercice 121 (une intégrale amusante)**.** Soient $f, g : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ deux fonctions continues. On suppose que f est intégrable. Pour tout x, on pose

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{1 + (x + g(t))^2}\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que F est intégrable.
2. Calculer
   $$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{f(t)}{1 + (s + g(t))^2}\mathrm{d}t\mathrm{d}s.$$
3. (Application). Calculer
   $$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-at^2}}{1 + (s + \cosh(t))^2}\mathrm{d}t\mathrm{d}s.$$

Indication. N'est-il pas clair que $F(x) = O((1+x^2)^{-1})$? Pour la deuxième question, une utilisation du théorème de Fubini devrait faire l'affaire... Que vaut l'intégrale $\int (1+t^2)^{-1}\mathrm{d}t$?

Exercice 122 (Intégrales de Gauss : $\star$). Soit A une matrice carrée de taille n.

1. À quelle condition l'application ϕ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par $\phi(x) = Ax$ est-elle un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$?
2. On rappelle qu'une matrice est dite *strictement positive* [8] si pour tout x non nul, on a $\langle x, Ax\rangle > 0$. Supposons que A est symétrique et strictement positive. Montrer qu'il existe une matrice symétrique strictement positive Q telle que $Q^2 = A$. Est-elle unique ?
3. Montrer que $x \mapsto \exp\{-||x||^2\}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$.
4. On suppose que A est strictement positive. On pose $x = (x_1, \dots, x_n)$. En utilisant un changement de variable, calculer l'intégrale

$$I(A) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle x,Ax\rangle} \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n.$$

Indication. La première question a déjà été implicitement traitée dans les exercices précédents. La deuxième est un classique d'algèbre linéaire et la troisième est expédiée en une invocation du théorème de Fubini.

Pour la quatrième question, on pourra essayer le changement de variable $y = Qx$. Le jacobien de ce changement n'est autre que $\det(Q)$ et celui-ci s'exprime en fonction de $\det(A)$, lequel s'exprime facilement compte tenu des propriétés de la matrice A... Pourquoi avoir supposé A strictement positive ? Le résultat final est

$$I(A) = \sqrt{\frac{\pi^n}{\lambda_1 \dots \lambda_n}}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de A.

Exercice 123 (L'inégalité de Hilbert : $\star\star$). Soient $f, g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ des fonctions continues et de carré intégrable. On suppose que f et g sont nulles sur $[0, a]$ pour un certain $a > 0$.

1. Montrer que l'intégrale

$$I = \iint_{[0,+\infty[^2} \frac{f(x)g(y)}{x+y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

est bien définie.

2. En effectuant un changement de variables, montrer que

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{1+s} \int_0^\infty f(x)g(sx)\mathrm{d}x\mathrm{d}s.$$

3. En déduire l'inégalité de Hilbert :

$$I \leqslant \pi \sqrt{\int_0^\infty f(x)^2 \mathrm{d}x} \sqrt{\int_0^\infty g(x)^2 \mathrm{d}x}.$$

Indication. L'hypothèse sur les fonctions f et g sera certainement utile pour la première question ! En effet, on remarque que pour tout x, y on a toujours $f(x)g(y)(x+y)^{-1} \leqslant f(x)g(y)(2a)^{-1}$. Pour la deuxième question, il faut utiliser le changement de variables $(x, y) \to (x, sx)$. On pourra enfin utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz (pour les fonctions) dans la dernière question...

Cette inégalité est la version continue de l'inégalité de Hilbert classique (1905), laquelle peut s'énoncer de la manière suivante : si (a_i) et (b_i) sont des suites positives, alors

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{a_n a_m}{n+m} \leqslant \pi \sqrt{\sum_{n\geqslant 1} a_n^2} \sqrt{\sum_{n\geqslant 1} b_n^2}$$

Il y a plusieurs démonstrations de cette inégalité (au moins une utilise l'inégalité de Cauchy-Scwharz). En particulier, si les deux suites a et b sont de carré intégrable, le terme de droite est fini. En exercice d'application, on pourra majorer la norme triple de la matrice de Hilbert H, qui est la matrice $(H_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ définie par $H_{i,j} = (i+j+1)^{-1}$.

8. Dans de nombreux livres, on trouve les termes « semi-définie positive » pour dire $\langle x, Ax\rangle \geqslant$ et « définie positive » pour dire $\langle x, Ax\rangle > 0$ mais je ne vois pas pourquoi on ne se contenterait pas de « positive » et « strictement positive ».

Exercice 124 (volume des boules en dimension n : $\star\star$). Notons $B_n(R)$ la boule unité fermée de centre 0 et de rayon R dans $\mathbb{R}^n$ pour la norme euclidienne ; on rappelle que

$$B_n(R) = \{(x_1,...,x_n) : x_1^2 + ... + x_n^2 \leqslant R^2\}.$$

1. Calculer l'aire de $B_2(R)$. Calculer le volume de $B_3(R)$.
2. En raisonnant par récurrence, montrer qu'il existe une constante κ_n telle que

$$\mathrm{vol}(B_n(R)) = \kappa_n \sqrt{\pi}^n R^n.$$

3. *(Cette question nécessite de bien connaître la fonction* Γ *; on pourra s'aider de l'indication.)* Montrer l'égalité suivante pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^{\pi/2} \cos(t)^\ell \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\ell+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\ell}{2}+1\right)}.$$

En déduire que

$$\kappa_n = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

En s'aidant de l'équivalent de Stirling, donner un équivalent de $\mathrm{vol}(B_n(1))$ lorsque $n \to \infty$.

4. Un ellipsoïde de paramètres $(a_1,...,a_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ est un ensemble de la forme

$$\mathscr{E}(a_1,...,a_n) = \left\{(x_1,...,x_n) : \frac{x_1^2}{a_1^2} + ... + \frac{x_n^2}{a_n^2} \leqslant 1\right\}.$$

   (a) Montrer que l'application $\varphi : (x_1,...,x_n) \mapsto (a_1x_1,...,a_nx_n)$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de B_n dans $\mathscr{E}(a_1,...,a_n)$.
   (b) Calculer $\mathrm{vol}\big(\mathscr{E}(a_1,...,a_n)\big)$.

Indication. Indication pour la troisième question : on rappelle que la fonction β d'Euler, définie pour tout $x > 0$ et $y > 0$ par

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t,$$

vérifie l'identité suivante :

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Solution. Dans cette feuille d'exercices, nous avons déjà vu que l'aire de B_2 est πR^2 et le volume de B_3 est $4\pi R^3/3$. L'initialisation de la deuxième question est donc assurée. Raisonnons maintenant par récurrence. Remarquons tout d'abord que

$$B_{n+1}(R) = \left\{-R \leqslant x_1 \leqslant R, x_2^2 + ... + x_{n+1}^2 \leqslant R^2 - x_1^2\right\}$$

donc si l'on pose $r(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, on obtient

$$B_{n+1}(R) = \{(x_1,...,x_{n+1}) : x_1 \in [-R,R], (x_2,...,x_{n+1}) \in B_n(r(x_1))\}.$$

On raisonner par récurrence et on suppose que pour tout t, on a $\mathrm{vol}(B(_n(t)) = \kappa_n\sqrt{\pi}^n t^n$. En utilisant le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(B_{n+1}(R)) &= \int_{B_{n+1}(R)} 1dx \\
&= \int_{-R}^{R}\left(\int_{B_n(r(x_1))} 1\mathrm{d}x_2...\mathrm{d}x_{n+1}\right)\mathrm{d}x_1 \\
&= \int_{-R}^{R}\mathrm{vol}\big(B_n(r(x_1))\big)\mathrm{d}x_1 \\
&= \kappa_n\sqrt{\pi}^n\int_{-R}^{R} r(x_1)^n\mathrm{d}x \\
&= \kappa_n\sqrt{\pi}^n\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)^{\frac{n}{2}}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

On procède maintenant au changement de variables $x = Rt$. On obtient

$$\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)^{\frac{n}{2}}\mathrm{d}x = R^{n+1}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\frac{n}{2}}\mathrm{d}t.$$

Finalement, si l'on pose $\kappa_{n+1} = \kappa_n\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\frac{n}{2}}\mathrm{d}t\sqrt{\pi}^{-1}$, on obtient

$$\mathrm{vol}\big(B_n(R)\big) = \kappa_{n+1}\sqrt{\pi}^{n+1}R^{n+1},$$

ce qui était l'expression demandée. Il reste donc à calculer κ_n. Conformément aux indications, il suffit de calculer l'intégrale $\int_{-1}^{1}(1-u^2)^{\frac{n}{2}}\mathrm{d}t$, laquelle est égale par parité à $2\int_0^1(1-u^2)^{\frac{n}{2}}\mathrm{d}t$. Soit donc ℓ un nombre réel positif : calculons $\int_0^1(1-u^2)^{\ell}\mathrm{d}t$. On pose $t = u^2$ et on obtient

$$\int_0^1(1-u^2)^{\ell}\mathrm{d}t = \int_0^1(1-t)^{\ell}\frac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$

et on reconnaît à droite l'expression de la fonction β d'Euler, conformément à l'indication. Plus précisément, on a

$$\int_0^1(1-u^2)^{\ell}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\beta\left(\ell+1,\frac{1}{2}\right).$$

Grâce à la formule donnée en indication, on a donc

$$\int_0^1(1-u^2)^{\ell}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\ell+1)\Gamma(1/2)}{\Gamma(\ell+1+1/2)}.$$

Il est bien connu [9] que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Ainsi, en revenant à la définition de κ_{n+1}, on obtient

$$\begin{aligned}
\kappa_{n+1} &= \frac{\kappa_n}{\sqrt{\pi}}2\int_0^1(1-u^2)^{\frac{n}{2}}\mathrm{d}u \\
&= \frac{2}{\Gamma(n/2+1)}\frac{\Gamma(1/2)}{2\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(n/2+1)}{\Gamma(n/2+1+1/2)} \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+1\right)}
\end{aligned}$$

ce qui démontre la formule recherchée pour κ_n. On conclusion, on a montré la jolie formule

$$\mathrm{vol}(B_n(R)) = \frac{\sqrt{\pi}^n R^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \begin{cases}\frac{\sqrt{\pi}^n R^n}{(n/2)!} & \text{si } n \text{ est pair,}\\ \frac{2^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{\pi}^{n-1}R^n}{n!} & \text{sinon.}\end{cases} \tag{3}$$

Voici quelques remarques sur ces formules. Tout d'abord, par l'équivalent de Stirling [10], on observe que

9. À un changement de variables près, la formule $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ a été démontré deux fois dans cette feuille d'exercices...

10. On rappelle que $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$, ce qui se généralise aussi $\Gamma(x) \sim x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}$ lorsque $x \to \infty$ (pas forcément entier).

$$\mathrm{vol}(B_n(R)) = O\left(\frac{C^n\sqrt{n}}{n^n}\right)$$

où C est une constante finie. L'expression à droite tend clairement vers 0, donc le volume de la n-sphère tend vers 0. C'est contraire à l'intuition des petites dimensions : en effet, le volume de la « boule » en dimension 1 (le segment $[-1,1]$) est 2, celui de la « boule » en dimension 2 (le disque unité) est $\pi > 2$ et celui de la boule en dimension 3 est $4\pi/3 > \pi$! En réalité, dès que $n > 5$, le volume de $B_n(1)$ devient décroissant. La dimension avec la boule unité de plus gros volume est 5. Voici les premières valeurs approchées :

n	1	2	3	4	**5**	6	7	8
$\mathrm{vol}(B_n(1))$	2	π	4,189	4,934	**5,264**	5,168	4,725	4,059

Quant au volume des ellipsoïdes, le difféomorphisme proposé est simplement la multiplication matricielle par $\mathrm{diag}(a_1,...,a_n)$; c'est évidemment une bijection de $B_n(1)$ dans $\mathscr{E}(a_1,...,a_n)$ et la formule du changement de variables donne

$$\mathrm{vol}(\mathscr{E}(a_1,...,a_n)) = a_1...a_n \cdot \mathrm{vol}(B_n(1)) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\prod_{i=1}^{n} a_i\sqrt{\pi}.$$

Exercice 125. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ une application dérivable telle que $t \mapsto ||f(t)||$ est constante. Montrer que pour tout t, les vecteurs $f'(t)$ et $f(t)$ sont orthogonaux.

Solution. Si $r(t) = ||f(t)||$ est constante, alors $t \mapsto f(t), f(t)\rangle$ l'est aussi, donc sa dérivée est nulle. On a donc $r'(t) = 0$. Or, après calculs on voit que $r'(t) = 2\langle f(t), f'(t)\rangle$, donc $\langle f'(t), f(t)\rangle = 0$, ce qui veut bien dire que $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux. Ce petit résultat est souvent utilisé dans l'étude des courbes paramétrées.

Exercice 126 (reparamétrisations unitaires)**.** Soit Γ une courbe dans $\mathbb{R}^n$, paramétrée par γ. On suppose que γ' ne s'annule jamais. La fonction longueur de Γ est

$$c(t) = \int_0^t ||\gamma'(s)||\mathrm{d}s.$$

1. Montrer que c est une bijection $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ dans $[0,\ell]$ où $\ell = c(1)$. Montrer que son inverse c^{-1} est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
2. Pour tout $t \in [0,\ell]$, on pose
$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma\big(c^{-1}(t)\big).$$
Montrer qu'il s'agit d'un nouveau paramétrage $\mathscr{C}^1$ de la courbe Γ.
3. Montrer que ce nouveau paramétrage vérifie $||\tilde{\gamma}'(t)|| = 1$ pour tout t.

Solution. Il est clair que c est une fonction $\mathscr{C}^1$ strictement croissante car c'est l'intégrale d'une fonction continue strictement positive, donc c'est une bijection sur son image $[0,\ell]$. Comme $c'(t) = ||\gamma'(t)|| > 0$ pour tout $t \in]0,1[$, par le théorème d'inversion locale c'est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $]0,1[$ dans $]0,\ell[$. La fonction $\tilde{\gamma}$ est la composée de γ et d'un difféomorphisme, donc c'est un paramétrage de Γ. Enfin, par la formule de dérivation des fonctions composées, on a

$$\tilde{\gamma}'(t) = \gamma'\left(c^{-1}(t)\right)\frac{1}{c'\left(c^{-1}(t)\right)} = \frac{\gamma'\left(c^{-1}(t)\right)}{||\gamma'\left(c^{-1}(t)\right)||}$$

ce qui montre clairement que $||\tilde{\gamma}'(t)|| = 1$. Cet exercice montre que pour toute courbe régulière [11], on peut toujours considérer que son vecteur tangent est unitaire, quitte à la reparamétrer.

Exercice 127 ($\star$)**.** Est-il possible qu'un chemin $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ dérivable ait une longueur infinie ? Et s'il est borné ? Et s'il est dérivable ? Et s'il est lipschitzien ?

Exercice 128. Les objets suivants se représentent par des (jolies) courbes. Essayer de leur trouver une paramétrisation et de calculer leur longueur.

11. Une courbe est régulière si sa dérivée ne s'annule pas.

1. $\alpha : t \in [0,1] \mapsto (t^2, t^4)$.
2. $\beta : t \in [0,1] \mapsto (t, t^2)$.
3. Une spirale.
4. Le chiffre 8.
5. Un ressort.
6. Un trêfle à quatre feuilles.
7. La trajectoire d'un point collé sur le bord du pneu de votre vélo.

Exercice 129. Donner une paramétrisation décrivant chacune des courbes suivantes :

1. le segment de droite joignant l'origine à un point quelconque de $\mathbb{R}^n$;
2. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 - 4 = 0,\ y \geq 0\}$ (de quel objet géométrique s'agit-il ?) ;
3. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2y = 0\}$ (même question) ;
4. le triangle de sommets $O = (0,0)$, $A = (1,0)$, $B = (0,1)$.

Exercice 130 (courbes planes)**.** Dans tout ce qui suit, on considère une courbe plane Γ, paramétrée par la fonction $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$. On suppose que $\gamma'(s)$ ne s'annule jamais. On pose $\gamma(s) = (x(s), y(s))$. On définit le *vecteur unitaire tangent* à la courbe Γ par

$$\tau(s) = \frac{\gamma'(s)}{||\gamma'(s)||}.$$

Pour tout s, il existe un unique vecteur $\mathbf{n}(s)$ tel que $(\tau(s), \mathbf{n}(s))$ forme une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que pour tout s, les vecteurs $\tau(s)$ et $\tau'(s)$ sont orthogonaux.
2. En déduire qu'il existe un nombre réel $\rho(s)$ tel que $\tau'(s) = \rho(s)\mathbf{n}(s)$. La fonction $s \mapsto \rho(s)$ est appelée *courbure algébrique de γ.*
3. Montrer que la courbure algébrique a l'expression suivante :
$$\rho(t) = \frac{\det \begin{pmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{pmatrix}}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}^3}.$$
4. Que dire d'une courbe plane régulière dont la courbure est nulle ?
5. Calculer la courbure de l'astroïde, c'est-à-dire de la courbe dont un paramétrage est $\gamma(t) = (\sin^3(t), \cos^3(t))$, en les points où elle est définie.

Indication. La première question a déjà été résolue dans un exercice précédent. La deuxième est évidente, puisque si $\tau'(t)$ est orthogonal à $\tau(t)$, cela veut dire que sa composante associée à $\tau(t)$ dans la base $(\tau(t), \mathbf{n}(t))$ est nulle et donc que $\tau(t)$ est colinéaire à $\mathbf{n}(t)$. Notons $\mathbf{F}(t) = (\tau(t), \mathbf{n}(t))$ (c'est une matrice 2×2). Comme les colonnes de $\mathbf{F}(t)$ forment une base orthonormale directe, on a $\det(\mathbf{F}(t)) = 1$. Or, comme $\tau'(t) = \rho(s)\mathbf{n}(t)$, on a aussi par linéarité du déterminant par rapport à la dernière colonne,

$$\det(\tau(t), \tau'(t)) = \rho(s)$$

et il ne reste plus qu'à expliciter ce déterminant. Notons $r(t) = ||\tau(t)||$. On a, par multilinéarité par rapport aux colonnes,

$$\mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} \frac{x'(t)}{r(t)} & \frac{x''(t)r(t) - x'(t)r'(t)}{r(t)^2} \\ \frac{y'(t)}{r(t)} & \frac{y''(t)r(t) - x'(t)r'(t)}{r(t)^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{r(t)^3} \begin{pmatrix} x'(t) & x''(t)r(t) - x'(t)r'(t) \\ x'(t) & y''(t)r(t) - x'(t)r'(t) \end{pmatrix}$$

En ajoutant à la deuxième colonne la première multipliée par $-r'(t)$, on ne change pas le déterminant. On a donc

$$\det(\mathbf{F}(t)) = \frac{1}{r(t)^3} \begin{vmatrix} x'(t) & x''(t)r(t) \\ x'(t) & y''(t)r(t) \end{vmatrix}$$

ce qui est précisément l'expression recherchée.

Exercice 131 (formules de Frenet-Serret : $\star$)**.** Dans tout ce qui suit, on considère une courbe Γ, paramétrée par la fonction $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$. On suppose que $\gamma'(s)$ ne s'annule jamais. On pose $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$.

On définit le *vecteur unitaire tangent* à la courbe Γ par

$$\tau(s) = \frac{\gamma'(s)}{||\gamma'(s)||}.$$

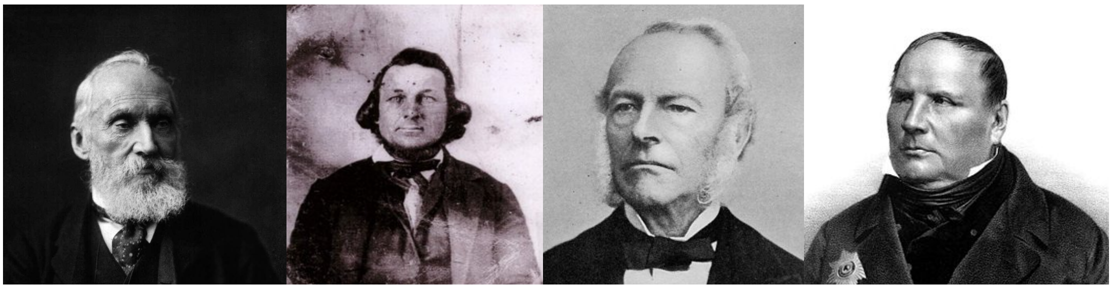
1. Montrer que pour tout s, les vecteurs $\tau(s)$ et $\tau'(s)$ sont orthogonaux.
2. La *courbure de* γ est définie par $\rho(s) = ||\tau'(s)||$. La normale principale $\mathbf{n}$ est définie par $\mathbf{n}(t) = \tau'(t)/\rho(t)$, et enfin la *binormale* est définie par $\mathbf{b}(t) = \tau(t) \wedge \mathbf{n}(t)$ où $\wedge$ est le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$.
   (a) Montrer que la famille $(\tau(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$. On l'appelle *trièdre de Frenet* [12].
   (b) Montrer que pour tout t, il existe deux réels $\alpha(t)$ et $\kappa(t)$ tels que
   $$\mathbf{n}'(t) = \alpha(t)\tau(t) + \kappa(t)\mathbf{b}(t).$$
   (c) Montrer que $\alpha(t) = -\rho(t)$ et que $\mathbf{b}'(t) = -\kappa(t)\mathbf{n}(t)$.
   (d) La fonction $t \mapsto \kappa(t)$ s'appelle *torsion de la courbe* γ. Que dire d'une courbe dont la torsion est nulle ?
3. Montrer les *équations de Frenet-Serret* :
$$\begin{pmatrix} \tau'(t) \\ \mathbf{n}'(t) \\ \mathbf{b}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \rho(t) & 0 \\ -\rho(t) & 0 & \kappa(t) \\ 0 & -\kappa(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau(t) \\ \mathbf{n}(t) \\ \mathbf{b}(t) \end{pmatrix}$$
4. Calculer la courbure et la torsion de *l'hélice circulaire*, dont une paramétrisation est donnée par
$$\gamma(t) = \left(a\cos\left(\frac{t}{r}\right), a\cos\left(\frac{t}{r}\right), \frac{b}{r} \right)$$
   où a, b sont deux réels non tous deux nuls et $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Exercice 132 ($\star\star$)**.** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Son graphe $\Gamma(f)$ est la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par $\{(t, f(t) : t \in [0,1]\}$.

1. Montrer que $\Gamma(f)$ est une courbe régulière de classe $\mathscr{C}^1$.
2. Montrer que la longueur de $\Gamma(f)$ est
$$\ell(\Gamma(f)) = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(t)^2}\mathrm{d}t.$$
3. On note ℓ la longueur du graphe de f. On suppose que f est croissante, et que $f(1) = \ell$. Montrer que
$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \geqslant \frac{\pi}{4}.$$

Indication. Les deux premières questions résultent des définitions du cours. La troisième est nettement plus difficile ! Essayer de faire apparaître la fonction f' dans l'intégrale en faisant une intégration par parties. On trouve $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \ell - \int_0^1 tf'(t)\mathrm{d}t$. En revenant à la définition de ℓ, on voit que l'intégrale de f s'écrit aussi $\int_0^1 \{\sqrt{1 + f'(t)^2} - tf'(t)\}\mathrm{d}t$. Pouvez-vous trouver minorer le terme sous l'intégrale ?

12. Jean-Frédéric Frenet, 1816 - 1900.



Dans le désordre, messieurs Ostrogradsky, Green, Kelvin et Stokes. Tous ont une part de responsabilité dans l'élaboration d'une formule qui porte leur nom (voir l'exercice 1).

Exercice 133. Faut-il dire « formule de Stokes », « formule de Kelvin-Stokes », « formule de Stokes-Ampère », « formule de Green », « formule de Green-Riemann », « formule d'Ostrogradsky » ou « formule de Green-Ostrogradsky » ?

Exercice 134 (Stokes, dimension 1)**.** Démontrer la formule $\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$ lorsque f est une fonction dérivable. Expliquer le titre de cet exercice.

Solution. Il est vivement conseillé de se replonger dans ses cours d'analyse réelle pour bien comprendre la démonstration de ce théorème, souvent appelé — à raison — *théorème fondamental de l'analyse réelle*. Il s'agit bien de l'analogue de la formule de Stokes en une dimension, l'idée de cette dernière étant de relier la somme des variations de f dans un ensemble avec la variation totale de f sur le bord de cet ensemble.

Exercice 135 (Intégrale curviligne)**.** On rappelle que si $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ est la paramétrisation d'une courbe Γ de classe $\mathscr{C}^1$ et si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, l'intégrale curviligne de f le long de γ est définie par

$$\int_\Gamma f(\ell)\mathrm{d}\ell = \int_0^1 f(\gamma(t))||\gamma'(t)||\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que l'intégrale curviligne ne dépend pas de la paramétrisation de la courbe Γ.
2. Calculer l'intégrale curviligne de la fonction $f : (x,y) \to x^2 - y^2$ le long du cercle unité.

Solution. Pour la deuxième question, on trouve 0.

Exercice 136 (circulation)**.** On rappelle que si $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ est la paramétrisation d'une courbe Γ de classe $\mathscr{C}^1$ et si $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une application continue, la circulation de V le long de γ est définie par

$$\oint_\Gamma V(\ell)\mathrm{d}\ell = \int_0^1 \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la circulation ne dépend pas de la paramétrisation de Γ.
2. Calculer la circulation d'une fonction constante le long de Γ.
3. Pour tout n, on pose $t_i^{(n)} = i/n$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left\langle V\left(\gamma(t_i^{(n)})\right) \,,\, \gamma(t_{i+1}^{(n)}) - \gamma(t_i^{(n)}) \right\rangle = \oint_\Gamma V(\ell)\mathrm{d}\ell.$$

4. Supposons que $V = \nabla F$, où F est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que si $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$, on a

$$\oint_\Gamma V(\ell)\mathrm{d}\ell = F(b) - F(a).$$

En particulier, cette intégrale ne dépend pas du chemin parcouru, mais uniquement de ses extrémités ! En déduire que si Γ est une courbe fermée, alors $\oint_\Gamma V(\ell)\mathrm{d}\ell = 0$.

Solution. L'invariance par reparamétrisation est faite dans le cours. Si V est la fonction constante égale au vecteur $x = (x_1,...,x_n)$, et si l'on note γ_i les coordonnées de γ et a,b les extrémités de Γ, on a

$$\begin{aligned}\oint_\Gamma V(\ell)\mathrm{d}\ell &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i\gamma_i'(t)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=1}^n x_i(b_i - a_i) = \langle x, b-a\rangle.\end{aligned}$$

Passons à la troisième question. Le terme de gauche ressemble fort à une somme de Darboux ! Effectuons un développement limité pour le chemin γ. Pour tout i et tout n, par le théorème de Rolle, il existe $\theta_i^{(n)}$ entre $t_{i+1}^{(n)}$ et $t_i^{(n)}$ tel que $\gamma(t_{i+1}^{(n)}) - \gamma(t_i^{(n)}) = \gamma'(\theta_i^{(n)})(t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)})$. Remarquons que la fonction γ' est continue car γ est $\mathscr{C}^1$. L'intervalle $[0,1]$ étant compact, elle est même uniformément continue par le théorème de Heine. Il existe donc un δ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, $||\gamma'(x) - \gamma'(y)|| < \varepsilon$ lorsque $|x-y| < \delta$. Choisissons n supérieur à δ^{-1}. Comme $t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)} = 1/n$, on aura $||\gamma'(\theta_i^{(n)}) - \gamma'(t_i^{(n)})|| < \varepsilon$. En particulier, pour tout $n \geqslant \delta^{-1}$ on a

$$\gamma(t_{i+1}^{(n)}) - \gamma(t_i^{(n)}) = \gamma'(t_i^{(n)})(t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}) + \frac{u_{i,n}}{n}$$

où $u_{i,n}$ est un vecteur tel que $||u_{i,n}|| < \varepsilon$. En prenant les produits scalaires et en sommant, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} \left\langle V\left(\gamma(t_i^{(n)})\right),\ \gamma(t_{i+1}^{(n)}) - \gamma(t_i^{(n)})\right\rangle &= \sum_{i=0}^{n-1} \left\langle V\left(\gamma(t_i^{(n)})\right),\ \gamma'(t_i^{(n)})(t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)})\right\rangle + R_n \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left\langle V\left(\gamma(t_i^{(n)})\right),\ \gamma'(t_i^{(n)})\right\rangle (t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}) + R_n\end{aligned}$$

avec

$$R_n = \sum_{i=0}^{n-1} \left\langle V\left(\gamma(t_i^{(n)})\right),\ \frac{u_{i,n}}{n}\right\rangle.$$

On reconnaît à droite la somme de Darboux associée à l'intégrale de la fonction réelle d'une variable réelle $t \to \langle V(\gamma(t))\gamma'(t)\rangle$. Ces sommes tendent vers l'intégrale $\oint_\Gamma V(\ell)\mathrm{d}\ell$ lorsque n tend vers l'infini, par définition même de la circulation.

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $\left\langle V\left(\gamma(t_i^{(n)})\right),\ \frac{u_{i,n}}{n}\right\rangle \leqslant \varepsilon A/n$ où $A = \sup_\Gamma ||V(x)||$ (on rappelle que f, continue sur le compact Γ, y est bornée). On a donc bien montré que si n est assez grand, $||R_n|| \leqslant \varepsilon A$ ce qui montre que $R_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Cela conclut la réponse à la question 3.

Passons à la dernière question. Si $V = \nabla F$, la définition de la circulation donne $\oint_\Gamma V(\ell)\mathrm{d}\ell = \int_0^1 \langle \nabla F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \mathrm{d}t = \int_0^1 (F\circ\gamma)'(t)\mathrm{d}t$, d'où le résultat.

Une application $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ pour laquelle il existe une fonction F avec $\nabla F = V$ est dite *exacte* ; on dit aussi qu'elle possède une primitive. Dans un langage plus physique, on dit que le champ de vecteurs V est un *champ de gradient* et qu'il *dérive du potentiel F*. La circulation d'un champ de gradient le long d'un chemin fermé est donc toujours nulle.

Plusieurs exercices dans cette feuille ont pour objectif d'étudier la très délicate question suivante : *si $V : U \to \mathbb{R}^n$ est une application définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, comment savoir si elle possède une primitive* ?

Exercice 137. Un mobile se trouve à l'instant t à la position M_t. En $t = 0$, il se trouve au point de coordonnées $(0,0,1)$. Sa vitesse à l'instant t est donnée par $\vec{v}_t = (-\sin(t), \cos(t), 1)$.

1. Où sera le mobile en $t = 2\pi$? Donner une paramétrisation de sa trajectoire entre 0 et 2π. On notera Γ cette trajectoire.
2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$f(x,y,z) = (4xy, 3y^2, 5z).$$

Calculer la circulation de f le long de la trajectoire du mobile.

Solution. La paramétrisation de la trajectoire Γ est évidemment donnée par $M_t = (\cos(t), \sin(t), t)$. Lorsque $t = 2\pi$, le mobile se trouve en $(1,0,2\pi)$. Quant à la circulation, elle vaut

$$\oint_\Gamma f(\ell)\mathrm{d}\ell = \int_0^{2\pi} \langle f(M_t), \vec{v}_t\rangle \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \left\{-4\cos(t)^2\sin(t)^2 + 3\sin(t)^2\cos(t) + 5t\right\}\mathrm{d}t$$

ce qui, après calculs (!), est sensé donner $10\pi^2$.

Exercice 138. Calculer la circulation de l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = (2xe^{x^2-2y}, -2e^{x^2-2y})$$

le long du chemin dont une paramétrisation est la fonction $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\gamma(t) = (\ln(1+t), e^t + 1).$$

Indication. On peut calculer brutalement la circulation de f le long du chemin en appliquant la définition. Cependant, on pouvait aussi remarquer que l'application f possède une primitive F. Plus précisément, si l'on pose $F(x,y) = \exp\{x^2 - 2y\}$, on a bien $\nabla F = f$. Par conséquent, au vu de l'exercice XXX, on a

$$\oint_\gamma f(\ell)\mathrm{d}\ell = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = e^{(\ln(2))^2-2(e+1)} - e^{-4}.$$

Exercice 139. Soit f l'application définie par $f(x,y) = (2xy + e^y, x^2 + xe^y)$. Calculer la circulation de f le long de la parabole $x = y^2$ entre les points $(0,0)$ et $(1,1)$.

Solution. Comme pour l'exercice précédent, on pouvait observer que f a pour primitie la fonction $F(x,y) = x^2y + xe^y$. On obtenait alors

$$\oint_\gamma f(\ell)\mathrm{d}\ell = F(1,1) - F(0,0) = 1 + e.$$

Exercice 140 (Formule de Stokes)**.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. On note $f = (p,q)$. Montrer la formule de Stokes pour les rectangles : autrement dit, si R est le rectangle de sommets A, B, C, D, montrer que

$$\iint_R \frac{\partial q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial p}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{\partial R} f(\ell)\mathrm{d}\ell \tag{4}$$

Dans toute la suite de cette feuille d'exercices, on supposera connue la formule de Stokes, énoncée de la manière suivante : *soit U un ensemble quarrable dont la frontière γ est une courbe $\mathscr{C}^1$ fermée orientée dans le sens direct. Alors,*

$$\int_U \mathrm{rot} f(x)\mathrm{d}x = \oint_{\partial U} f(\ell)\mathrm{d}\ell. \tag{5}$$

Exercice 141 (Schwarz *via* Stokes)**.** L'objectif de cet exercice est de démontrer le théorème de double dérivation de Schwarz à partir de la formule de Stokes.

1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que si pour tout rectangle R, on a

$$\int_R f(x)\mathrm{d}x = 0,$$

alors f est la fonction nulle.

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. Démontrer le théorème de double dérivation de Schwarz à partir de la formule de Stokes.

Indication. Pour la première question, il faut utiliser la croissante de l'intégrale et la continuité de f ! Si f n'est pas nulle, c'est qu'il existe un x_0 tel que $f(x_0) \neq 0$... Pour la deuxième question, l'intégrale curviligne se calcule très facilement dans ce cas là.

Solution. Si f n'est pas nulle, il existe x_0 tel que $f(x_0) \neq 0$, disons $f(x_0) > 0$. Par définition de la continuité appliquée à $\varepsilon = f(x_0)/2$, il existe un δ tel que pour tout $x \in B(x_0, \delta)$, on a $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, c'est-à-dire $f(x_0)/2 < f(x) < 3f(x_0)/2$. En particulier, pour tout $x \in B(x_0, \delta)$, on a $f(x) > 0$, donc par croissance de l'intégrale, si R est un rectangle inclus dans $B(x_0, \delta)$, on a $\int_R f(x)\mathrm{d}x > 0$ ce qui contredit l'hypothèse. On a bien démontré la proposition par contraposée.

Maintenant, notons $p(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. La fonction ∇f est de classe $\mathscr{C}^1$: par la formule de Stokes, on a donc

$$\int_R \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} = \int_{\partial R} \nabla f(\ell)\mathrm{d}\ell.$$

Or, par définition de l'intégrale curviligne, si $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ est une paramétrisation de ∂R, on a

$$\begin{aligned}\int_{\partial R} \nabla f(\ell)\mathrm{d}\ell &= \int_0^1 \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \mathrm{d}t \\ &= f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = 0.\end{aligned}$$

Nous venons de montrer que pour tout rectangle dans $\mathbb{R}^2$, on a $\int_R \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} = 0$. Par la première question, cela implique que $\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} = 0$, ce qui est exactement l'énoncé du théorème de Schwarz.

Exercice 142. Calculer, à l'aide de la formule de Stokes, l'intégrale suivante :

$$\iint_D \frac{1}{(x+y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}x$$

où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, xy \geqslant 1, x+y \leqslant 4\}$.

Indication. L'idéal est de trouver une application telle que $\mathrm{rot}(f)$ est égal à $1/(x+y)^2$, afin de se ramener (via la formule de Stokes) à une intégrale sur une courbe. Le résultat final est $\ln(2+\sqrt{3}) - \sqrt{3}/2$.

Exercice 143. Soit $\mathscr{C}$ le cercle unité dans $\mathbb{R}^2$. Calculer la circulation de V le long de $\mathscr{C}$, où $V(x,y) = (x^2y, -6y^2)$.

Solution. On trouve $1/8$.

Exercice 144. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Admet-elle toujours une primitive ?

Exercice 145 (primitives : $\star\star$)**.** Soit $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application $\mathscr{C}^1$. On dit qu'une fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une *primitive* de V lorsque $V = \nabla F$.

1. Si f admet une primitive, que dire de sa matrice jacobienne ? Toutes les fonctions admettent-elles une primitive ?
2. Montrer qu'une application $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathscr{C}^1$ possède une primitive si et seulement si son rotationnel est nul.

Solution. D'après le théorème de Schwarz, si V a une primitive, F est $\mathscr{C}^2$, donc sa hessienne est symétrique, ce qui revient à dire que la jacobienne de V est symétrique, ou encore que V a un rotationnel nul. Par conséquent, une application V de rotationnel non nul ne peut pas avoir de primitive : par exemple, $V(x,y) = (0,x)$ n'a pas de primitive.

Supposons maintenant que V a un rotationnel nul, c'est-à-dire que sa jacobienne est symétrique. Notons $V = (p,q)$ où p,q sont des fonctions $\mathscr{C}^1$. On va construire la primitive F. Quitte à translater V, on peut supposer que $V(0,0 = (0,0)$. Soit (x,y) un point de $\mathbb{R}^2$. Soit γ une paramétrisation du chemin affine par morceaux qui relie $(0,0)$ à $(x,0)$ puis à (x,y). On pose

$$F(x,y) = \oint_\gamma V(\ell)\mathrm{d}\ell.$$

Par la définition de l'intégrale curviligne, on a aussi

$$F(x,y) = \int_0^x p(t,0)\mathrm{d}t + \int_0^y q(x,t)\mathrm{d}t.$$

Il faut alors vérifier que $\nabla F = V$. On vérifiera simplement que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = p(x,y). \tag{6}$$

Pour cela, on remarque d'abord que

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x p(t,0)\mathrm{d}t = p(x,0) - p(0,0) = p(x,0).$$

Il faut maintenant calculer $\frac{\partial}{\partial x}\int_0^y q(x,t)\mathrm{d}t$. On a pour cela envie d'utiliser la propriété sous le rotationnel et de dériver sous le signe intégral ; il est possible de le faire, mais on va quand même donner une justification moins théorique. On a

$$q(x,t) = q(0,t) + \int_0^x \frac{\partial q}{\partial x}(s,t)\mathrm{d}s.$$

On pose $c(y) = \int_0^y q(0,t)\mathrm{d}t$. En utilisant successivement le théorème de Fubini, puis le fait que le rotationnel est nul, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^y q(x,t)\mathrm{d}t &= \int_0^y \left\{q(0,t) + \int_0^x \frac{\partial q}{\partial x}(s,t)\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t\\ &= c(y) + \int_0^x\int_0^y \frac{\partial p}{\partial y}(s,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\ &= c(y) + \int_0^x p(s,y) - p(s,0)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

et maintenant, en dérivant en x, on a

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^y q(x,t)\mathrm{d}t = p(x,y) - p(x,0).$$

Finalement,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = p(x,y) - p(x,) + p(x,0) = p(x,y),$$

ce qui correspond bien à (6).

Exercice 146. En utilisant l'exercice précédent, dire si les fonctions suivantes admettent une primitive :

$$\begin{aligned}f(x,y) &= (3x, 4x + y^2x)\\ g(x,y) &= (2\cos(y)x, -x^2\sin(y))\\ h(x,y) &= \left(\arctan(y), \frac{x}{1+y^2}\right)\end{aligned}$$

Solution. Il suffit de vérifier si leur rotationnel est nul. La réponse est : non, oui, oui.

Exercice 147 (une mise en garde historique)**.** Posons $\Omega = \mathbb{R}^2$. Dans l'exercice précédent, on a vu qu'une application de Ω admettait une primitive si et seulement si son rotationnel était nul. De là à généraliser cet énoncé à tous les ouverts Ω de $\mathbb{R}^2$, il n'y a qu'un pas... qui fut franchi dès 1740 par A. Clairaut, lequel avait énoncé (à peu de choses près) la proposition suivante :

« *si* $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, *alors il existe* $F : \Omega \to \mathbb{R}$ *telle que* $\frac{\partial F}{\partial x} = P$ *et* $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$. »

Il fallut attendre 1768 pour que d'Alembert montre que cet énoncé était notoirement [13] faux ! Le contre-exemple donné par d'Alembert est l'application V, définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ par

$$V(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

1. Constater que V est bien de rotationnel nul sur son ensemble de définition.

13. (et subtilement)

2. (a) Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre 0 et de rayon 1. Montrer que

$$\oint_{\mathscr{C}} V(\ell)\mathrm{d}\ell = 2\pi.$$

(b) Pourquoi cela contredit-il l'existence d'une primitive pour V ?

Solution. Les deux premières questions se font simplement par le calcul. Pour la dernière, il suffit d'utiliser le fait (déjà démontré dans les exercices précédents) que si une application a une primitive, sa circulation le long de tout chemin fermé est nulle !

L'énoncé de Clairaut est donc purement et simplement *faux* : il faut une condition sur l'ouvert Ω en question. Laquelle ?

Exercice 148 (formule d'Ostrogradsky)**.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. Soit D un ensemble quarrable dont la frontière Γ est une courbe fermée orientée $\mathscr{C}^1$ par morceaux et γ un paramétrage de Γ défini sur $[0,1]$.

On note $\nu(t)$ le vecteur orthogonal [14] à $\gamma(t)$ défini par $\nu(t) = (\gamma_2(t), -\gamma_1(t))$ et on note $\Gamma^\perp$ la courbe paramétrée par ν (c'est encore une courbe $\mathscr{C}^1$ par morceaux).

Montrer la formule d'Ostrogradsky :

$$\iint_D \operatorname{div}\big(f(x,y)\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{\Gamma^\perp} f(\ell)\mathrm{d}\ell = \int_0^1 \langle f\big(\nu(t)\big), \nu'(t)\rangle \mathrm{d}t.$$

Indication. C'est réglé en une application de la formule de Stokes... pourvu de l'appliquer à la bonne application !

Exercice 149 (intégrales de Fresnel : $\star\star\star$)**.** L'objectif de cet exercice est de démontrer les égalités suivantes :

$$\int_0^\infty \cos(t^2)\mathrm{d}t = \int_0^\infty \sin(t^2)\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{8}}. \tag{7}$$

On notera $\mathscr{F}_1 = \int_0^\infty \cos(t^2)\mathrm{d}t$ et $\mathscr{F}_2 = \int_0^\infty \sin(t^2)\mathrm{d}t$. De telles intégrales s'appellent *intégrales de Fresnel*. Il existe plusieurs méthodes de calculs ; nous allons adopter une approche via la formule de Stokes [15].

1. Montrer que ces intégrales sont bien définies (*faire une intégration par parties*).
2. Montrer que $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_2$.
3. On pose

$$V(x,y) = \big(e^{y^2-x^2}\sin(2xy), e^{y^2-x^2}\cos(2xy)\big).$$

Soit $A > 0$. Soit Γ le triangle fermé de sommets $(0,0)$, $(A,0)$ et (A,A).

(a) Calculer $\oint_\Gamma V(\ell)\mathrm{d}\ell$.

(b) Le chemin Γ est la réunion de trois segments. Exprimer la circulation de V le long de chacun de ces trois segments et étudier la limite de chaque terme lorsque $A \to \infty$. Conclure.

Indication. La méthode consiste à exprimer cette intégrale grâce à la circulation d'un champ de vecteurs bien choisi, le long d'une courbe fermée tout aussi bien choisie. Le cadre naturel pour cette méthode très puissante est l'analyse complexe (méthode des résidus), dans laquelle la formule de Stokes s'appelle *formule de Cauchy*.

14. On trouvera dans la feuille d'exercice 7 sur les courbes paramétrées plusieurs exercices où ν intervient. Par exemple, on constatera que si $\mathbf{n}(t)$ est le vecteur normal unitaire à Γ en $\gamma(t)$, alors on a $\mathbf{n}(t) = \nu'(t)/||\nu'(t)||$.

15. Il est également possible de calculer ces intégrales en introduisant un paramètre.

Solution. Par une IPP, on obtient

$$\int_A^B \cos(t^2)\mathrm{d}t = [-\sin(t^2)/2t]_1^B - (1/2)\int_A^B \sin(t^2)/t^2\mathrm{d}t$$

puis en faisant tendre A, B vers $0, \infty$ on voit clairement que cette expression est convergente. Noter que ce résultat n'est pas évident ; il est vraiment dû au fait que les oscillations du cosinus (ou du sinus) se rapprochent tellement qu'elles finissent par se compenser.

L'application V est bien de rotationnel nul, donc par la formule de Stokes [16] sa circulation le long de la courbe fermée Γ est nulle. Cette courbe se décompose en trois segments, disons $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$. Posons $I_k(A) = \oint_{\Gamma_k} V(\ell)\mathrm{d}\ell$, de sorte que

$$0 = \oint_{\Gamma_1} V(\ell)\mathrm{d}\ell = I_1(A) + I_2(A) + I_3(A).$$

On va calculer chacun des trois termes et leur limite en $+\infty$.

• Une paramétrisation de Γ_1 est $t \in [0, A] \mapsto (t, 0)$, donc on a

$$\oint_{\Gamma_1} V(\ell)\mathrm{d}\ell = \int_0^A e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

Ainsi, $\lim_{A\to\infty} I_1(A) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (c'est l'intégrale de Gauss).

• Une paramétrisation de Γ_2 est donnée par $t \in [0, A] \to (A, t)$, donc

$$I_2(A) = \int_0^A e^{t^2 - A^2}\cos(2tA)\mathrm{d}t.$$

On va démontrer que cette intégrale tend vers 0 lorsque $A \to \infty$.

• Une paramétrisation de Γ_3 est $t \in [0, A] \mapsto (A - t, A - t)$ (attention, on parcourt le segment dans le sens inverse), or $V(u, u) = (\sin(2u^2), \cos(2u^2))$ donc on a

$$\oint_{\Gamma_3} V(\ell)\mathrm{d}\ell = -\int_0^A \cos(2t^2) + \sin(2t^2)\mathrm{d}t.$$

Lorsque A tend vers l'infini, après le changement de variable $u = \sqrt{2}t$, on obtient

$$\oint_{\Gamma_3} V(\ell)\mathrm{d}\ell = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty \cos(t^2) + \sin(t^2)\mathrm{d}t = \frac{-1}{\sqrt{2}}(\mathscr{F}_1 + \mathscr{F}_2).$$

Conclusion. Nous avons vu que $\oint_\Gamma V(\ell)\mathrm{d}\ell = 0 = I_1(A) + I_2(A) + I_3(A)$. En faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient donc

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathscr{F}_1 + \mathscr{F}_2) = 0$$

ce qui équivaut bien, compte tenu du fait que $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_2$, au résultat

$$\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

Exercice 150 (Fresnel niveau 2, $\star\star\star$)**.** L'étudiant avide de calculs pourra essayer d'adapter la méthode précédente pour calculer démontrer la formule suivante, valable pour tout α entier [17] :

$$\int_0^\infty t^\alpha \cos(t^2)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}(\alpha+1)\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right).$$

Exercice 151 (calcul d'aire)**.** Soit Γ une courbe fermée.

1. Montrer que l'aire délimitée par Γ est donnée par

$$\oint_\Gamma f(\ell)\mathrm{d}\ell$$

16. ou de manière équivalente, parce qu'elle a une primitive !
17. Et en fait pour tout $\alpha > 0$, mais la méthode ici présentée ne s'applique pas aux cas où α n'est pas entier.

où $f(x,y) = (-y,0)$. Par exemple, si $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ est une paramétrisation de Γ définie sur $[0,1]$, l'aire entourée par Γ est

$$-\int_0^1 \gamma_2(t)\gamma_1'(t)\mathrm{d}t.$$

2. Retrouver l'aire d'une ellipse grâce à la question précédente.
3. Calculer l'aire délimitée par *l'astroïde*, dont une paramétrisation $\gamma : t \in [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ est donnée par

$$\gamma(t) = \big(a\cos(t)^3, a\sin(t)^3\big).$$

Indication. Pour la première question, on pourra utiliser la formule de Stokes en cherchant une fonction dont le rotationnel est égal à 1. Pour le calcul de l'aire de l'astroïde, on se ramène à une intégrale de puissances de sin et cos. On linéarise, et on trouve $3\pi a^2/8$.

Bonus : formes différentielles.

On appelle *forme différentielle de degré k* sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ toute application $\omega : U \to \mathscr{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ où $\mathscr{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est l'ensemble des formes k-linéaires sur $\mathbb{R}^n$. On rappelle qu'une forme k-linéaire est une fonction $f : \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui est linéaire en chacune de ses k variables.

Une forme différentielle de degré 0 est simplement une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Dans la suite, on dira simplement « forme différentielle » ou « forme » si le degré est 1.

L'objectif de cette feuille d'exercice est de traduire le cours d'analyse vectorielle dans le langage des formes différentielles.

Exercice 152. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable, sa différentielle $x \mapsto Df(x)$ est une forme différentielle. On la notera $\mathrm{d}f$.

Exercice 153. Expliciter la forme $\mathrm{d}f$ pour les fonctions suivantes :

1. $f(x,y,z) = xy + \cos(yz) - z^6$
2. $f(x) = \cosh(x)$.
3. $f(x,y) = xy^2 - y^3 + 7y^2x^2$.
4. $f(x,y,z,t) = xyz + yzt^4$.

Exercice 154. Soit $\varphi : U \to V$ un difféomorphisme entre deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Soit $\omega : V \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ une forme différentielle. On pose

$$\varphi_* \omega(x) = \omega(\varphi(x)) \circ D\varphi(x).$$

Vérifier que $\varphi_* \omega$ est une forme différentielle sur U.

Exercice 155. Vérifier que, si P, Q sont des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et si α, β sont des formes différentielles, alors l'application

$$x \in \mathbb{R}^n \mapsto P(x)\alpha(x) + Q(x)\beta(x)$$

est encore une forme différentielle.

Exercice 156. On notera $\mathrm{d}x_i$ la forme linéaire définie par $\mathrm{d}x_i(a_1, ..., a_n) = a_i$.

1. Montrer que si ω est une forme différentielle, il existe des fonctions $P_1, ..., P_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telles que $\omega = \sum_{i=1}^n P_i \mathrm{d}x_i$ et qu'elles sont uniques.
2. Montrer que si f est différentiable, on a
$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i.$$

On dit qu'une forme différentielle $\omega = \sum P_i \mathrm{d}x_i$ est de classe $\mathscr{C}^k$ si les P_i sont de classe $\mathscr{C}^k$.

Soit Γ une courbe $\mathscr{C}^1$ régulière paramétrée par γ. Soit ω une forme différentielle. Son intégrale le long de Γ est définie par

$$\int_\Gamma \omega = \int_0^1 \omega\big(\gamma(t)\big)(\gamma'(t))\mathrm{d}t.$$

Exercice 157. Vérifier que la définition précédente a bien du sens.

Exercice 158. Si f est une fonction $\mathscr{C}^1$, vérifier que

$$\int_\Gamma \mathrm{d}f = \oint_\Gamma \nabla f(\ell)\mathrm{d}\ell.$$

Soit ω une forme différentielle de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$; il existe deux fonctions $\mathscr{C}^1$ notées P,Q telles que $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$. On définit une fonction $\mathrm{d}\omega : U \to \mathbb{R}$ par

$$\mathrm{d}\omega = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}. \tag{8}$$

Exercice 159. Vérifier que $\mathrm{d}\omega = \mathrm{rot}(V)$ où $V = (P,Q)$.

Exercice 160. Vérifier que si f est de classe $\mathscr{C}^2$, on a $\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = 0$.

Exercice 161 (formule de Stokes)**.** Soit ω une forme différentielle de clase $\mathscr{C}^1$ et U un ouvert dont le bord est une courbe régulière ∂U. Montrer que dans le langage des formes différentielles, la formule de Stokes s'écrit

$$\int_U \mathrm{d}\omega = \oint_{\partial U} \omega \tag{9}$$

où $\int_U \mathrm{d}\omega$ est simplement l'inta=égrale sur U de la fonction $\mathrm{d}\omega$.

On dit qu'une forme différentielle ω sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ est *exacte* s'il existe une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\omega = \mathrm{d}f$.

Exercice 162. Soit ω une forme différentielle sur U. Montrer que si ω est exacte, alors pour tout $i \neq j$ on a

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}. \tag{10}$$

Montrer que pour tout disque D inclus dans U, on a

$$\int_{\partial D} \omega = 0.$$

Une forme différentielle ω sur un ouvert U est dite *fermée* lorsque pour tout disque D inclus dans U, on a

$$\int_{\partial D} \omega = 0.$$

On vient de montrer que les formes exactes sont fermées.

Exercice 163 (lemme de Poincaré : $\star$)**.** Montrer que si U est un rectangle, un disque, un demi-plan ou $\mathbb{R}^2$, alors une forme différentielle sur U est fermée si et seulement si elle est exacte.

Exercice 164 (lemme de Poincaré, II : $\star$)**.** Montrer que si U est un rectangle, un disque, un demi-plan ou $\mathbb{R}^2$, alors une forme différentielle sur U est fermée si et seulement si elle vérifie

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Exercice 165. Dire si les formes différentielles suivantes sont exactes :

1. $\omega = xy\mathrm{d}x + yx^2\mathrm{d}y$.

2. $\omega = \tan(x+y)\mathrm{d}x + (1+\tan^2(x+y))\mathrm{d}y$.
3. $\omega = 2xe^{x^2-y}\mathrm{d}x - 2e^{x^2-y}\mathrm{d}y$.

Exercice 166. On pose $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ où $P(x,y) = x/(x^2+y^2)$ et $Q(x,y) = -y/(x^2+y^2)$. C'est une forme différentielle sur $\mathbb{C}^*$. Montrer que ω est fermée mais n'est pas exacte.

Exercice 167 (facteur intégrant)**.** On pose $\omega = (x^2+y^2+2x)\mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}y$.

1. Montrer que ω n'est pas exacte.
2. Trouver une fonction $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non nulle telle que $\psi(x)\omega$ soit exacte et calculer une primitive.