Espaces mesurés

Exercice 1 (Rappels). Soient $(A_n)_{n\geq 1}$ des événements d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

a) Montrer que
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

b) On suppose que $\mathbb{P}(A_n) = 1$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1.$$

c) On suppose que $(A_n)_{n\geq 1}$ est décroissante. Montrer que
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

d) Justifier que les ensembles suivants sont des événements, et les décrire avec des mots.
$$\liminf_{n\to\infty} A_n \ := \ \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{and} \quad \limsup_{n\to\infty} A_n \ := \ \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

e) Démontrer le premier Lemme de Borel-Cantelli :
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) \ < \ \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \ = \ 0.$$

f) Démontrer la formule du crible de Poincaré (inclusion-exclusion) : pour tout $n \geq 1$,
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right).$$

Exercice 2 Soit (A_n) une suite décroissante d'ensembles mesurables et μ une mesure. A-t-on toujours $\mu(\cap A_n) = \lim \mu(A_n)$?

Exercice 3 (La tribu $\mathscr{B}(\mathbb{R})$). Montrer que les classes suivantes engendrent la même tribu sur $\mathbb{R}$:

a) Les ouverts de $\mathbb{R}$.

b) Les fermés de $\mathbb{R}$.

c) Les intervalles de la forme (a, b) avec $-\infty < a < b < +\infty$.

d) Les intervalles de la forme $(-\infty, t], t \in \mathbb{R}$.

e) Les intervalles de la forme $(-\infty, t], t \in \mathbb{Q}$.

Exercice 4 (Tribu engendrée par une application). Soit f une application d'un ensemble Ω vers un espace mesuré $(E, \mathscr{B})$. Montrer que
$$\mathscr{A} \ := \ \left\{f^{-1}(B) \colon B \in \mathscr{B}\right\},$$
définit une tribu sur Ω. On l'appelle la tribu engendrée par l'application f.

Exercice 5 (Lemme des classes monotones). Soit Ω un ensemble, et $\mathscr{M}$ un ensemble de parties de Ω. On rappelle que $\mathscr{M}$ est une classe monotone si elle vérifie :

- $\Omega \in \mathscr{M}$;
- si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante d'élements de $\mathscr{M}$, alors $\bigcup_{n\geq 1} A_n$ est aussi dans $\mathscr{M}$;
- si A, B sont des éléments de $\mathscr{M}$ avec $A \subseteq B$, alors $B \setminus A$ est aussi dans $\mathscr{M}$.

a) Montrer que les tribus sont exactement les classes monotones stables par intersection finie.
b) Soit $\mathscr{M}$ une classe monotone et soit $C \in \mathscr{M}$. Montrer que $\mathscr{M}_C := \{A \in \mathscr{M} : A \cap C \in \mathscr{M}\}$ est encore une classe monotone.
c) En déduire le lemme des classes monotones : si $\mathscr{C}$ est stable par intersections finies, alors toute classe monotone qui contient $\mathscr{C}$ contient aussi $\sigma(\mathscr{C})$.
d) Application : montrer que, si $\mathscr{C}$ est stable par intersection finie, toute mesure de probabilité sur $(\Omega, \sigma(\mathscr{C}))$ est entièrement déterminée par ses valeurs sur $\mathscr{C}$.

Exercice 6 Montrer que la mesure de Lebesgue d'un ensemble fini est nulle.

Exercice 7 (Fonction de répartition). Soit μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. On appelle fonction de répartition associée à μ la fonction $F \colon \mathbb{R} \to [0,1]$ définie par

$$F(x) \quad := \quad \mu\left((-\infty, x]\right).$$

a) Montrer que μ est caractérisée par sa fonction de répartition.
b) Montrer que F est croissante et continue à droite et calculer ses limites en $\pm\infty$.
c) Réciproquement, montrer que toute fonction croissante, continue à droite et de limites 0 et 1 en $\pm\infty$ est la fonction de répartition d'une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.
d) Soit $a \in \mathbb{R}$. Exprimer $\mu(\{a\})$ en fonction de F.
e) Montrer que l'ensemble des atomes $\{a \in \mathbb{R} \colon \mu(\{a\}) > 0\}$ est au plus dénombrable.
f) Représenter le graphe d'une fonction de répartition « générale ».
g) Soit $a \in \mathbb{R}$. Démontrer l'identité

$$\int_a^{\infty} (1 - F(x))dx \quad = \quad \int_{\mathbb{R}} (x-a)_+ \, \mu(dx).$$

Exercice 8 Donner la mesure de Lebesgue des ensembles suivants : $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, l'ensemble de Cantor, l'ensemble des entiers algébriques.

Exercice 9 Soit μ une mesure borélienne finie sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout borélien X et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert O et un fermé F tels que $F \subset X \subset O$ et tel que $\mu(O \setminus F) \leqslant \varepsilon$.

Exercice 10 Montrer qu'il existe une unique mesure μ sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $a < b$, $\mu([a,b]) = \int_a^b |x| dx$.

Exercice 11 (Cas particuliers).

a) Lois discrètes : soit Ω un ensemble fini ou dénombrable, et soit $p \colon \Omega \to [0,1]$ une fonction telle que $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$. Pour $A \subseteq \Omega$, on pose :

$$\mathbb{P}(A) \quad := \quad \sum_{\omega \in A} p(\omega).$$

Vérifier que $\mathbb{P}$ définit une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$. Rappeler les définitions des lois discrètes suivantes : uniforme, Bernoulli, Binômiale, Géométrique, Poisson.

b) Lois à densité : Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne avec $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Pour $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, on pose :

$$\mathbb{P}(A) \quad := \quad \int_A f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vérifier que $\mathbb{P}$ définit une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Rappeler les densités des lois suivantes : uniforme, Exponentielle, Gaussienne, Cauchy, Gamma.

Exercice 12 (Tribu borélienne sur $\mathbb{R}^2$)On note Σ_1 la plus petite tribu sur $\mathbb{R}^2$ qui rend les applications coordonnées (à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$) mesurables, Σ_2 la tribu $\sigma\left(\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})\right)$ (engendrée par les produits de boréliens réels), et Σ_3 la tribu des boréliens de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma_3$.