

INTÉGRATION

**Exercice 1** (Inégalité de Markov). Soit  $f$  une fonction mesurable positive sur un espace  $(E, \mathcal{A}, \mu)$ .

a) Montrer que pour tout  $a > 0$ , on a

$$\mu(f \geq a) \leq \frac{1}{a} \int_E f \, d\mu.$$

b) En déduire que  $\int_E f \, d\mu = 0$  si et seulement si  $f$  est nulle  $\mu$ -presque partout.

c) En déduire que si  $X$  est une variable aléatoire réelle, telle que  $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$ , alors, pour tout  $t > 0$ ,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t) \leq \frac{\text{Var}(X)}{t^2}.$$

**Exercice 2** (Mesures à densité). Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré et  $f$  une fonction mesurable positive sur  $E$ . Pour tout  $A \in \mathcal{A}$ , on pose

$$\nu(A) := \int_E \mathbf{1}_A f \, d\mu.$$

a) Vérifier que  $\nu$  est une mesure sur  $(E, \mathcal{A})$ .

b) Montrer que pour toute fonction  $h: E \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable positive, on a

$$\int_E h \, d\nu = \int_E hf \, d\mu. \quad (1)$$

c) Soit à présent  $h: E \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable de signe quelconque. Montrer que  $h \in L^1(E, \mathcal{A}, \nu)$  si et seulement si  $hf \in L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$  et que dans ce cas, (1) est encore vérifiée.

**Exercice 3** (Équivalences). Soient  $\mu, \nu$  deux mesures de probabilité sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . Montrer que l'égalité  $\mu = \nu$  est équivalente à chacune des conditions suivantes :

a)  $\mu((a, b)) = \nu((a, b))$  pour tout  $-\infty < a < b < +\infty$

b)  $\int_E f \, d\mu = \int_E f \, d\nu$  pour toute fonction  $f$  mesurable positive.

c)  $\int_E f \, d\mu = \int_E f \, d\nu$  pour toute fonction  $f$  continue bornée.

d)  $\int_E f \, d\mu = \int_E f \, d\nu$  pour toute fonction  $f$  continue à support compact.

**Exercice 4** (Équivalence, suite) Soient  $\mu, \nu$  deux mesures de probabilité sur  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ , montrer que  $\mu = \nu$  si et seulement si

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x)g(y)\mu(dx, dy) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)g(y)\nu(dx, dy),$$

pour toutes fonctions  $f$  et  $g$  continues à support compact.

**Exercice 5** (Fonction Gamma). Soit  $\theta \in (0, \infty)$ . On rappelle que  $\Gamma(\theta) = \int_0^\infty x^{\theta-1} e^{-x} \, dx$ .

a) Vérifier que pour tout  $\theta \in (0, \infty)$  et tout entier  $n \geq 1$ , on a

$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{\theta-1} \, dx = \frac{(n!)n^\theta}{\theta(\theta+1)\cdots(\theta+n)}.$$

b) En déduire la formule d'Euler :

$$\Gamma(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)n^\theta}{\theta(\theta+1)\cdots(\theta+n)}.$$

c) Utiliser cette formule pour calculer  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ , puis retrouver l'identité  $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ .

**Exercice 6** (Interversion). Soit  $(f_n)_{n \geq 1}$  une suite de fonctions dans  $L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$  telle que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| d\mu < \infty.$$

a) Montrer que l'on peut alors intervertir l'ordre de la somme et de l'intégrale :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu.$$

b) En déduire les égalités suivantes :

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx = -\frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

**Exercice 7** (Lemme de Riemann-Lebesgue). Montrer que pour toute  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , on a

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \cos(nx) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

**Exercice 8** (Dérivation sous l'intégrale). Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré et  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervalle ouvert. On considère une fonction  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  de la forme

$$F(t) := \int_E f(t, x) \mu(dx),$$

où  $f: I \times E \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction qui vérifie les conditions suivantes :

- (i) Pour tout  $t \in I$ , la fonction  $x \mapsto f(t, x)$  est dans  $L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$  ;
- (ii) Pour  $\mu$ -presque tout  $x \in E$ , la fonction  $t \mapsto f(t, x)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  ;
- (iii) Il existe  $g \in L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$  telle que pour tout  $t \in I$  et  $\mu$ -presque tout  $x \in E$ ,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| \leq g(x).$$

Montrer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et que pour tout  $t \in I$ ,

$$F'(t) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \mu(dx).$$

**Exercice 9** (Équation différentielle). On cherche à évaluer, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , l'intégrale

$$F(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx.$$

Montrer que  $F$  vérifie l'équation différentielle  $F'(t) = -tF(t)$  pour  $t \in \mathbb{R}$ , puis conclure.

**Exercice 10** (Autre application). On cherche à évaluer, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , l'intégrale

$$F(t) := \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-tx^2}}{x^2} dx.$$

Montrer que  $F$  est dérivable sur  $(0, \infty)$  et calculer sa dérivée, puis conclure.

**Exercice 11** (Passages à la limite). Soit  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction positive et monotone. Déterminer la limite de  $I_n = \int_0^1 f(x^n) dx$ .