Fonctions caractéristiques

Exercice 1 (Propriétés élémentaires).

a) Montrer que φ_X est bornée et uniformément continue.

b) Montrer que φ_X est de type positif : pour tout $n \geq 1$ et tout $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, la matrice complexe $\{\varphi_X(t_j - t_k)\}_{1 \leq j,k \leq n}$ est hermitienne positive.

c) Soit $n \geq 1$. On suppose que $\mathbb{E}\left[|X|^n\right] < \infty$. Montrer que $\varphi_X \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R})$, et calculer $\varphi_X^{(n)}$.

d) Donner le développement de Taylor de φ_X d'ordre 2 en zero lorsque $\mathbb{E}[X^2] < \infty, \mathbb{E}[X] = 0$.

e) Plus généralement, montrer que si $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{a|X|}] < \infty$ pour un certain $a > 0$, alors φ_X s'étend en une unique fonction holomorphe dans $D(0, a)$ vérifiant

$$\varphi_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n z^n}{n!} \mathbb{E}[X^n].$$

Exercice 2 La fonction $\cos(t^2)$ est-elle la fonction caractéristique d'une variable aléatoire ?

Exercice 3 (Lois usuelles). Calculer Φ_X dans chacun des cas suivants.

a) $X \sim \mathscr{U}(\{-1, +1\})$.

b) $X \sim \mathscr{B}(p)$.

c) $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$.

d) $X \sim \mathscr{G}(p)$

e) $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$.

f) $X \sim \mathscr{U}(-a, a)$.

g) $X \sim \mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$.

h) $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$.

i) $X \sim \Gamma(r, \lambda)$.

Exercice 4 (Formule d'inversion de Fourier). On se propose de montrer que si $\varphi_X \in L^1(\mathbb{R})$, alors X admet une densité continue et bornée, donnée par la formule suivante :

$$f(x) \quad = \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx} \varphi_X(t) \mathrm{d}t \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

a) Vérifier que f est bien continue et bornée.

b) Justifier que pour tous $\sigma > 0$ et $u \in \mathbb{R}$, on a

$$\exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) \quad = \quad \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\mathrm{i}ut - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \mathrm{d}t.$$

c) En déduire que pour tous $\sigma > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{(X-y)^2}{2\sigma^2}\right)\right] \quad = \quad \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\mathrm{i}yt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \varphi_X(t) \, \mathrm{d}t.$$

d) En déduire que pour toute fonction $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue à support compact, on a

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} h(y) \mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{(X-y)^2}{2\sigma^2}\right)\right] \mathrm{d}y \quad \xrightarrow[\sigma \to 0+]{} \quad \int_{\mathbb{R}} h(y) f(y) \, \mathrm{d}y.$$

e) Vérifier que le membre de gauche vaut $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[h(X + \sigma s)] \mathrm{e}^{-\frac{s^2}{2}} \, \mathrm{d}s$ et conclure.

Exercice 5 Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$, et X une variable aléatoire réelle. On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $A \in \mathscr{G}$, on a

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX} \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}] \mathbb{P}(A).$$

Montrer qu'alors X est indépendante de $\mathscr{G}$.

Exercice 6 Soit X une variable aléatoire réelle bornée. Montrer que φ_X ne peut pas être à support compact.

Exercice 7 (Cauchy). Soit λ un réel strictement positif.

a) Vérifier que $f\colon x \mapsto \frac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{-\lambda|x|}$ est une densité (dite densité de Laplace de paramètre λ), et calculer la fonction caractéristique associée.

b) En déduire la fonction caractéristique de la loi de Cauchy de paramètre λ.

c) Que peut-on dire de la somme de deux variables aléatoires de Cauchy indépendantes ?

Exercice 8 (Atomes). Soit X une variable aléatoire. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\varphi_X(t)\,\mathrm{d}t \quad \xrightarrow[t\to\infty]{} \quad \mathbb{P}\left(X = x\right).$$

Exercice 9 (Transformations). Montrer que si φ est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle, alors $\overline{\varphi}$, $\mathrm{Re}(\varphi)$, $|\varphi|^2$ et $\mathrm{e}^{\varphi-1}$ en sont aussi.

Exercice 10 (Somme d'uniformes). Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme sur l'intervalle $(-1, 1)$. On pose $Z := X + Y$.

a) Montrer que Z admet une densité que l'on calculera.

b) Calculer par ailleurs φ_Z.

c) En déduire la fonction caractéristique de la loi de densité $t \mapsto c\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2$, ainsi que la valeur de la constante c.

Exercice 11 (Laplace). Soient W, X, Y, Z des variables aléatoire indépendantes, de loi $\mathscr{N}(0, 1)$.

a) Déterminer la fonction caractéristique de WX.

b) En déduire la loi de $WX + YZ$.

c) Montrer que $|WX + YZ|$ suit la loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice 12 Soit Q une loi symétrique sur $\mathbb{R}$, avec la propriété suivante : pour tout $n \geq 1$, si $X_1, \ldots, X_n$ sont i.i.d. de loi Q, alors $\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ suit encore la loi Q. Trouver Q.

Exercice 13 Dans cet exercice, X et Y désignent des variables aléatoires indépendantes et idendiquement distribuées de loi inconnue, de moyenne 0 et de variance 1. De plus, $X + Y$ est indépendante de $X - Y$. Quelle est la loi de X et Y ?

Exercice 14 Dans cet exercice, X et Y désignent des variables aléatoires indépendantes et idendiquement distribuées de loi inconnue, de carré intégrable. De plus, $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ suit aussi la même loi que X et Y.

a) Quelle est l'espérance de X ?

b) Déterminer une équation fonctionnelle satisfaite par φ_X.

c) Résoudre cette équation à l'aide d'un développement de Taylor, et trouver la loi de X.

Exercice 15 (Formule de Stirling). Soit X_t une variable aléatoire de loi $\Gamma(1, t)$, c'est-à-dire de densité $\Gamma(t)^{-1}\mathbf{1}_{x>0}e^{-x}x^{t-1}$.

a) Calculer la densité de $Y_t = (X_t - t)/\sqrt{t}$ et sa fonction caractéristique.

b) En déduire que

$$\frac{t^{t-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-t}}{\Gamma(t)} = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}u\sqrt{t}}\left(1 - \frac{\mathrm{i}u}{\sqrt{t}}\right)^{-t}\mathrm{d}u.$$

c) Démontrer la formule de Stirling sous la forme suivante :

$$\Gamma(t+1) \sim t^t\mathrm{e}^{-t}\sqrt{2\pi t}.$$