

SUITES ALÉATOIRES

Exercice 1 (Convergences). Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes, de paramètres respectifs $(p_n)_{n \geq 1}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que

- $X_n \rightarrow 0$ presque-sûrement lorsque $n \rightarrow \infty$;
- $X_n \rightarrow 0$ en probabilité lorsque $n \rightarrow \infty$;
- $X_n \rightarrow 0$ dans L^p lorsque $n \rightarrow \infty$, où $p \geq 1$ est un nombre donné ;
- $nX_n \rightarrow 0$ presque sûrement lorsque $n \rightarrow \infty$;
- $nX_n \rightarrow 0$ en probabilité lorsque $n \rightarrow \infty$;
- $nX_n \rightarrow 0$ dans L^p lorsque $n \rightarrow \infty$, où $p \geq 1$ est un nombre donné.

Exercice 2 (Concentration). Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables dans L^2 , d'espérances $(\mu_n)_{n \geq 1}$ et de variances $(\sigma_n^2)_{n \geq 1}$. On suppose que $\mu_n \neq 0$ et que $\sigma_n/\mu_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Montrer que

$$\frac{X_n}{\mu_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 1.$$

Exercice 3 (Problème du collectionneur). Chaque œuf en chocolat contient une surprise choisie au hasard et uniformément parmi n surprises possibles, indépendamment des autres œufs. Un enfant décide de manger les œufs un à un, jusqu'à ce qu'il ait récolté un exemplaire de chacune des n surprises possibles. On cherche à estimer le nombre T_n d'œufs qu'il lui faudra manger.

- Montrer que T_n est la somme de n variables géométriques indépendantes.
- En déduire l'espérance et la variance de T_n .
- Conclure que $\frac{T_n}{n \ln n} \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$, en un sens que l'on précisera.

Exercice 4 (Records). Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables i.i.d. de fonction de répartition F , et

$$\alpha := \inf \{t \in \mathbb{R} : F(t) > 0\} \in [-\infty, +\infty) \quad \text{et} \quad \beta := \sup \{t \in \mathbb{R} : F(t) < 1\} \in (-\infty, +\infty].$$

Montrer que presque-sûrement, $\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n = \alpha$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = \beta$.

Exercice 5 (Maximum d'exponentielles). Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ i.i.d. de loi $\mathcal{E}(1)$. On cherche à établir que

$$Z_n := \frac{\max \{X_1, \dots, X_n\}}{\ln n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} 1.$$

- Vérifier que la convergence a lieu en probabilité lorsque $n \rightarrow \infty$.
- Montrer que presque-sûrement, $\liminf_{n \rightarrow \infty} Z_n \geq 1$.
- Montrer que presque-sûrement $Z_{2^k} \rightarrow 1$ lorsque $k \rightarrow \infty$, puis conclure.

Exercice 6 (Maximum de gaussiennes). Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On veut montrer que

$$\frac{\max \{X_1, \dots, X_n\}}{\sqrt{2 \ln n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} 1.$$

- Montrer que pour tout $x > 0$, $\mathbb{P}(X_1 > x) \leq \frac{e^{-x^2/2}}{x}$.
- Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout t suffisamment grand, $\mathbb{P}(X > x) \geq c \frac{e^{-x^2/2}}{x}$.
- Conclure à l'aide d'une approche similaire à celle de l'exercice précédent.

Exercice 7 (Pas de loi des grands nombres sans moment). Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ des variables i.i.d.

- Montrer que $\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{|X_n| \geq n\})$ vaut 0 ou 1 selon que X_1 est intégrable ou non.
- Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombre réels telle que la suite $(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k)_{n \geq 1}$ soit convergente dans \mathbb{R} . Montrer que nécessairement, $\frac{u_n}{n} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.
- Déduire des deux questions précédentes que si X_1 n'est pas intégrable, alors la probabilité pour que la suite $(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k)_{n \geq 1}$ soit convergente dans \mathbb{R} est nulle.

Exercice 8 (Processus de Poisson). Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ des variables indépendantes de loi $\mathcal{E}(1)$. On pose $T_0 := 0$ et $T_n := X_1 + \dots + X_n$ pour $n \geq 1$. Enfin, on fixe $\lambda > 0$ et on pose

$$N := \max \{n \geq 0 : T_n \leq \lambda\}.$$

- Justifier que $N < \infty$ presque-sûrement.
- Montrer que pour $n \geq 1$, le vecteur (T_1, \dots, T_n) admet une densité que l'on déterminera.
- Déterminer la loi de la variable aléatoire N .
- Pour $n \geq 1$, déterminer la loi conditionnelle de (T_1, \dots, T_n) sachant $\{N = n\}$.

Exercice 9 Soit $p \in [0, 1], \lambda > 0$. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ des variables indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$, et soit N une variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(\lambda)$, indépendante de $(X_n)_{n \geq 1}$. On pose

$$X := \sum_{k=1}^N X_k \quad \text{et} \quad Y := \sum_{k=1}^N (1 - X_k).$$

Montrer que les variables X et Y sont indépendantes et déterminer leurs lois.

Exercice 10 (Récurrence/transience). Soit $p \in [0, 1]$, et $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables i.i.d. avec $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_1 = -1) = 1 - p$. On pose $S_0 := 0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$S_n := X_1 + \dots + X_n.$$

On s'intéresse à $Z := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{(S_n=0)}$, le nombre de visites en zéro du processus $(S_n)_{n \geq 0}$.

- Donner la loi de S_n pour $n \geq 0$, et trouver le comportement de $\mathbb{P}(S_n = 0)$ lorsque $n \rightarrow \infty$.
- En déduire que si $p \neq \frac{1}{2}$, alors $\mathbb{P}(Z < \infty) = 1$. Pouvait-on le prévoir sans faire de calcul ?
- On pose $A_n := \{S_n = 0\} \cap \bigcap_{k \geq n+1} \{S_k \neq 0\}$. Montrer que

$$\mathbb{P}(Z < \infty) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(S_n = 0)\mathbb{P}(A_0).$$

- En déduire que si $p = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(Z < \infty) = 0$.

Exercice 11 Soit (A_n) une suite de variables aléatoires iid strictement positives, au sens où $\mathbb{P}(A_n \leq) = 0$. On suppose que $\mathbb{E}[\ln A_n] < 0$.

- Étudier la convergence de la suite de variables aléatoires définie par $X_n = A_1 \dots A_n$.
- Étudier la convergence de la série de terme général X_n .

Exercice 12 (théorème de Carleman) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires. On suppose qu'il existe deux constantes C, c telles que pour tout n , $\mathbb{P}(|X_n| > x) \leq Ce^{-cx^2}$ (on dit que ces variables sont *sous-gaussiennes*).

- On suppose que X_n converge en loi vers une variable aléatoire X . Montrer que pour tout entier k , $\mathbb{E}[X_n^k]$ converge vers $\mathbb{E}[X^k]$.
- Réciproquement, on suppose que pour tout entier k , $\mathbb{E}[X_n^k]$ converge vers $\mathbb{E}[X^k]$.
 - Montrer qu'il existe une constante a telle que pour tout n et pour tout k , $\mathbb{E}[|X_n|^{k+1}] \leq (ak)^{k/2}$.
 - En déduire que $\varphi_{X_n}(t) = \sum_{j=0}^k \frac{(it)^j}{j!} \mathbb{E}[X_n^j] + O((ak)^{-k/2} |t|^{k+1})$, où les constantes du $O(\cdot)$ ne dépendent ni de t , ni de n .
 - En déduire que X_n converge en loi vers X .