

CONVERGENCE EN LOI

**Exercice 1** (Exemples). Déterminer la limite en loi de  $(Z_n)_{n \geq 1}$  dans chacun des cas suivants.

- a)  $Z_n = \frac{X_n}{n}$ , avec  $X_n \sim \mathcal{U}(\{1, \dots, n\})$ .
- b)  $Z_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ , avec  $np_n \rightarrow \lambda \in (0, \infty)$ .
- c)  $Z_n = \frac{X_n}{n}$ , avec  $X_n \sim \mathcal{G}(p_n)$  et  $np_n \rightarrow \lambda \in (0, \infty)$ .
- d)  $Z_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}$  avec  $(X_n)_{n \geq 1}$  i.i.d. et  $\mathbb{E}[X_1^2] = 1$ ,  $\mathbb{E}[X_1] = 0$ .
- e)  $Z_n = \frac{X_n - \mathbb{E}[X_n]}{\sqrt{\text{Var}(X_n)}}$ , avec  $X_n \sim \mathcal{P}(\lambda_n)$  et  $\lambda_n \rightarrow +\infty$ . En déduire au passage la valeur de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + n + \frac{n^2}{2!} + \dots + \frac{n^n}{n!} \right) e^{-n}.$$

- f)  $Z_n = \frac{X_n - \mathbb{E}[X_n]}{\sqrt{\text{Var}(X_n)}}$ , avec  $X_n \sim \Gamma(r_n, \lambda)$  et  $r_n \rightarrow \infty$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .
- g)  $Z_n = n \min(X_1, \dots, X_n)$ , avec  $(X_n)_{n \geq 1}$  i.i.d.  $\mathcal{U}(0, 1)$ . Y a-t-il convergence p.s. ?
- h)  $Z_n = h(X_n)$ , avec  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue et  $(X_n)_{n \geq 1}$  convergeant en loi vers  $X$ .

**Exercice 2** Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires iid, de loi de Pareto de paramètres  $(b, \alpha)$  : leur densité est  $f(x) = \mathbf{1}_{x > b} \alpha b^\alpha x^{-(\alpha+1)}$  où  $\alpha > 0$ . On pose

$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(X_i/b).$$

- a) Montrer que  $Z_n$  converge presque sûrement vers  $\alpha^{-1}$ .
- b) Montrer que  $\sqrt{n}(Z_n - \alpha^{-1})$  converge en loi vers  $\mathcal{N}(0, \alpha^{-2})$ .

**Exercice 3** (Cas déterministe). Soit  $(a_n)_{n \geq 1}$  une suite réelle. À quelle condition y a-t-il convergence en loi pour la suite aléatoire  $(X_n)_{n \geq 1}$  définie par  $X_n = a_n$  ?

**Exercice 4** (Cas discret). Soient  $X, X_1, X_2, \dots$  des v.a. dans  $\mathbb{Z}$ . Montrer que  $X_n \rightarrow X$  en loi si et seulement si  $\forall k \in \mathbb{Z}, \mathbb{P}(X_n = k) \rightarrow \mathbb{P}(X = k)$ . Quelle est la limite de  $\mathcal{B}(n, p_n)$  lorsque  $np_n \rightarrow \lambda$  ?

**Exercice 5** (Cas à densité : lemme de Scheffé). Soient  $X, X_1, X_2, \dots$  des v.a. de densités respectives  $f, f_1, f_2, \dots$ . Montrer que  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{P.P.}} f \implies X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^1, \text{loi}} X$  et construire un contre-exemple pour la réciproque.

**Exercice 6** (Cas gaussien). On suppose que pour tout  $n \geq 1, X_n \sim \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$ . Montrer que  $(X_n)_{n \geq 1}$  converge en loi si et seulement si  $(\mu_n)_{n \geq 1}$  et  $(\sigma_n)_{n \geq 1}$  convergent, et trouver la loi limite.

**Exercice 7** Soient  $(A_n)$  des variables aléatoires iid, à valeurs dans un intervalle  $[a, A]$  où  $0 < a < A$ . On pose  $X_n = A_1 A_2 \dots A_n$ .

- a) Montrer que  $X_n^{1/n}$  converge presque sûrement.
- b) On suppose que  $\mathbb{E}[\ln A] = 0$ . Calculer la limite en loi de  $X_n^{1/\sqrt{n}}$ .

**Exercice 8** Soit  $(E_n)$  une suite de variables aléatoires iid de loi  $\mathcal{E}(1)$ . On pose

$$M_n = \max\{E_1, \dots, E_n\}.$$

Montrer que  $M_n - \ln(n)$  converge en loi vers une variable aléatoire de Gumbell standard  $G$ , dont la fonction de répartition est donnée par  $\mathbb{P}(G \leq x) = e^{-e^{-x}}$ .

**Exercice 9** (Série aléatoire). Soit  $(X_k)_{k \geq 1}$  une suite de v.a.i.i.d. de loi  $\mathcal{U}(\{-1, +1\})$ . Montrer que la v.a.  $Z := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} X_k$  est bien définie, et déterminer sa loi. *Indication* : établir l'identité

$$2^n \sin(2^{-n}t) \prod_{k=1}^n \cos(2^{-k}t) = \sin(t) \quad (n \in \mathbb{N}, t \geq 0).$$

**Exercice 10** (Suite de Cauchy) Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi de Cauchy  $\mathcal{C}(1)$ .

- $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i$  converge-t-elle en loi ?
- $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  converge-t-elle en loi ? en proba ?
- Montrer que, pour  $t > 0$ ,  $\frac{1}{\pi(t+1)} \leq \mathbb{P}(X_1 > t) \leq \frac{1}{\pi t}$ .
- On note  $Z_n = \frac{\max_{i=1, \dots, n} X_i}{n}$ . Montrer que  $Z_n$  converge en loi vers une variable  $Z$  dont on donnera la densité.

**Exercice 11** (Queue lourde). Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de v.a.i.i.d. de densité

$$f(x) := \frac{1}{|x|^3} \mathbf{1}_{(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)}(x).$$

- Vérifier que  $f$  est bien une densité, puis calculer  $\mathbb{E}[X_1]$  et  $\mathbb{E}[X_1^2]$ . Le TCL s'applique-t-il ?
- On note  $\varphi$  la fonction caractéristique de  $X_1$ . Justifier que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\varphi(t) = 1 - 2t^2 \int_t^{\infty} \frac{1 - \cos(x)}{x^3} dx.$$

- En déduire que  $\varphi(t) = 1 - t^2 \ln \frac{1}{t} + o(t^2 \ln \frac{1}{t})$  lorsque  $t \rightarrow 0^+$ .
- Soit  $Z_n := \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n \ln n}}$ . Conclure que  $(Z_n)_{n \geq 1}$  converge en loi et préciser la limite.
- Soit  $\theta \geq 0$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ e^{-\theta Z_n^2} \right]$  existe et la calculer.

**Exercice 12** (Lois stables). On dit que  $X$  suit la loi stable de paramètres  $\alpha \in [1, 2]$  et  $\lambda \in (0, \infty)$  si

$$\Phi_X(t) = \exp(-\lambda |t|^\alpha) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

- Quelles lois reconnaît-on dans les cas  $\alpha = 1$  et  $\alpha = 2$  ?
- Montrer que  $X$  admet une densité donnée par

$$f_X(x) = \frac{\lambda \alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{sinc}(xt) t^\alpha e^{-\lambda t^\alpha} dt \quad (x \in \mathbb{R}).$$

- Pour quelles valeurs de  $\alpha$  l'espérance  $\mathbb{E}[X]$  existe-t-elle ? Quelle est alors sa valeur ?
- Soient  $(X_n)_{n \geq 1}$  des v.a.i.i.d. de même loi que  $X$ . Quelle est la loi de  $Z_n := \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}$  ?
- Pour quelles valeurs de  $\alpha$  la suite  $(Z_n)_{n \geq 1}$  converge-t-elle en loi ? Que peut-on en déduire ?

**Exercice 13** (Distance de Lévy). Si  $\mu, \mu'$  sont des mesures de probabilités sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , de fonctions de répartition notées  $F, F'$ , on définit

$$d(\mu, \mu') := \inf \{ \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, F(x - \delta) - \delta \leq F'(x) \leq F(x + \delta) + \delta \}.$$

Vérifier que  $d$  est une distance, et qu'elle métrise la convergence étroite.

**Exercice 14** (Théorème de représentation de Skorokhod). On considère l'espace probabilisé canonique  $\Omega = [0, 1]$  muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

- Soit  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  de fonction de répartition  $F$ . On pose

$$X(\omega) := \inf \{ t \in \mathbb{R} : F(t) \geq \omega \} \quad (\omega \in \Omega).$$

Vérifier que  $X$  est une variable aléatoire sur  $\Omega$ , et que sa loi est  $\mu$ .

- Soit  $\mu, \mu_1, \mu_2, \dots$  des probabilités sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , et  $X, X_1, X_2, \dots$  les v.a. sur  $\Omega$  obtenues par la construction ci-dessus. Montrer que  $X_n \rightarrow X$  p.s. si et seulement si  $\mu_n \Rightarrow \mu$ .