Vecteurs gaussiens

Exercice 1 Soit (X, Y) un vecteur gaussien de moyenne μ et de covariance Σ,

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{1,1} & \Sigma_{1,2} \\ \Sigma_{1,2} & \Sigma_{2,2} \end{bmatrix}.$$

a) Calculer $\mathbb{E}[X \mid Y]$.

b) Calculer $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X \mid Y])^2 \mid Y]$.

c) Montrer que pour tout t réel,

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX} \mid Y] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mu_1 + \frac{\Sigma_{1,2}}{\Sigma_{2,2}}(Y - \mu_2)) - \frac{t^2}{2}(\Sigma_{1,1} - \frac{\Sigma_{1,2}^2}{\Sigma_{2,2}})}$$

Exercice 2 Deux variables aléatoires gaussiennes de covariance nulle sont-elles toujours indépendantes ?

Exercice 3 Soit X un vecteur gaussien dans $\mathbb{R}^n$, de loi $\mathcal{N}(0, \Sigma)$. Soit H un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

a) Calculer la loi de $p_H(X)$ où p_H est la projection orthogonale sur H.

b) Montrer que $|p_H(X)|^2$ suit une loi $\chi_2(\dim H)$.

c) Si K est le supplémentaire orthogonal de K, montrer que $p_H(X)$ et $p_K(X)$ sont indépendants.

Exercice 4 Soit X un vecteur gaussien dans $\mathbb{R}^n$, de loi $\mathcal{N}(0, \Sigma)$.

a) Montrer que $\mathbb{E}[|X|^2] = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$ où les λ_i sont les valeurs propres de Σ.

b) Calculer la loi du couple $(\langle a, X\rangle, \langle b, X\rangle)$ où $a, b \in \mathbb{R}^n$ sont deux vecteurs fixés.

Exercice 5 Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ des variables gaussiennes indépendantes centrées réduites.

a) On pose $\bar{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$ et $Y_n = (X_1 - \bar{X}_n, \ldots, X_n - \bar{X}_n)$. Montrer que ces deux variables aléatoires sont indépendantes.

b) Calculer la loi de $\bar{X}_n$ et celle de $|Y_n|^2$.

c) Trouver la densité de la variable aléatoire

$$T_n = \frac{\bar{X}_n}{\sqrt{|Y_n|^2/(n-1)}}.$$

Exercice 6 Soit (X, Y) un vecteur gaussien centré de covariance

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$$

où ρ est un nombre réel, $|\rho| < 1$. Montrer que

$$\mathbb{P}(X > 0, Y > 0) = \frac{1}{4} + \frac{\arcsin(\rho)}{2}.$$

Exercice 7 Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur gaussien. On suppose que pour tout k, $\mathrm{Cov}(X_i, X_{i+k})$ ne dépends pas de i (on adopte la notation cyclique : $X_{n+1} = X_1, X_{n+2} = X_2$ et ainsi de suite). Montrer que la matrice de covariance de X est une matrice circulante.

Exercice 8 Soit $X \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ un vecteur gaussien dans $\mathbb{R}^n$.

a) Calculer $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}t|X|^2/2}]$ lorsque $\Sigma = I_n$.

b) Calculer $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}t|X|^2/2}]$ lorsque Σ est diagonale.

c) Calculer $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}t|X|^2/2}]$ dans le cas général.

d) En déduire $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{t|X|^2/2}]$.

e) Soit $X \sim \mathscr{N}(0, I_n)$ et soit M une matrice hermitienne avec $\|M\| < 1$. Montrer que

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\frac{\langle X, MX\rangle}{2}}] = \sqrt{\frac{1}{\det(I - M)}}.$$

Exercice 9 ($\star\star$) Soit X un vecteur gaussien dans $\mathbb{R}^n$, de loi $\mathscr{N}(0, I_n)$.

a) Montrer que $\mathbb{E}[n^{-1}|X|^2] = 1$. Quelle est la loi de $|X|^2$?

b) On fixe $t \in]0, 1[$. Montrer qu'il existe une constante c telle que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{|X|^2}{n} - 1\right| > t\right) \leqslant 2\mathrm{e}^{-cnt}.$$

c) Vérifier que $|x - 1| > t$ entraîne que $|x^2 - 1| > t$. En déduire que pour tout $s > 0$, si n est assez grand, alors

$$\mathbb{P}(||X| - \sqrt{n}| > s) \leqslant 2\mathrm{e}^{-cs^2}.$$

Contrairement à ce que pourrait indiquer l'intuition, un vecteur gaussien en grande dimension n n'est donc pas concentré autour de sa moyenne (ici 0) mais sur les bords de la sphère de rayon $\sqrt{n}$.

Exercice 10 Soient X, Y deux vecteurs indépendants de loi $\mathscr{N}(0, I_n)$. On pose $\bar{X} = X/|X|$ et $\bar{Y} = Y/|Y|$.

a) Montrer que, $\mathbb{P}$-presque sûrement, $|X| \sim \sqrt{n}$.

b) En déduire que $\langle \bar{X}, \bar{Y}\rangle \to 0$ presque sûrement, et que $\sqrt{n}\langle \bar{X}, \bar{Y}\rangle$ converge en loi vers une limite à identifier.